Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test I. MAANCPA01

Před sebou máte zadání 1. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Mezi dovolené pomůcky patří: psací potřeby.
4. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 11:45 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do 11:50 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–4 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 12:15 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Láska je pro mysl člověka složitější než matematika, mnohdy s neřešitelnými příklady.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	$\sum$
Možno získat:	7	4	2	3	16
Získáno:					

1. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - n\right) \cdot \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot n + n^2}{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot n + n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}+n^2+1-\cancel{n^3}}{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2+1}\cdot n + n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \dfrac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\cdot 1 + 1} = \dfrac{1}{3}$

$\to 0$ 0 0 0 0

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\ to\infty} \left(\frac{2n-2}{2n+3}\right)^{2n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(2n+4)\cdot\ln\left(\frac{2n-2}{2n+3}\right)} = * = \lim\limits_{y\to -5} e^y = e^{-5}$

e^x je spojitá

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+4)\cdot\ln\left(\frac{2n-2}{2n+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+4)\cdot \dfrac{\ln\left(\frac{2n-2}{2n+3}\right)}{\left(\frac{2n-2}{2n+3}-1\right)} \cdot \left(\frac{2n-2}{2n+3}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(2+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2n}-2-\cancel{2n}-3}{2n+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}\cdot\left(2+\frac{4}{n}\right)\cdot(-5)}{\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)} = -5$

$\to 1$ 1 $\to 0$ $\to 0$

(c) (3 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n};\ a,\, b,\, c \in \mathbb{R}^+$

viz cvičení - posloupnosti, str. 3, úloha 2.i).

(d) (2 bb) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7-(n+3)^7}{(n+2)^7-n^7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^7}+\binom{7}{1}n^6+o(n^6)-\left[\cancel{n^7}+\binom{7}{1}n^6\cdot 3+o(n^6)\right]}{\cancel{n^7}+\binom{7}{1}n^6\cdot 2+o(n^6)-\cancel{n^7}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^6}}{\cancel{n^6}} \cdot \dfrac{\left[7-7\cdot 3+\frac{o(n^6)}{n^6}\right]}{7\cdot 2+\frac{o(n^6)}{n^6}} = \dfrac{7(1-3)}{7\cdot 2} = -1$

$\to 0$ $\to 0$

2. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot e^n}{2^{2n}+\sin n \cdot n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot e^n}{4^n} \cdot \frac{1}{1+\sin n \cdot \frac{n^3}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{\left(\frac{4}{e}\right)^n}}_{\to 0} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\sin n}_{\text{omezená}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n^3}{4^n}\right)}_{\to 0}}$

limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a>1$

$= 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0$

použité limity: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a>1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0$, $k>0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{a_n}_{\text{omez.}} \cdot \underbrace{(b_n)}_{0} = 0$

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})\cdot(3^n+n^2)}{3^{n+2}-\ln n+\cos n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{n^2}{3^n}\right)}{3^2-\frac{\ln n}{3^n}+\cos n \cdot \frac{1}{3^n}} =$

limita slož. fce ($\sin(x)$ je spoj.)

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{n^2}{3^n} \to 0$, $\frac{\ln n}{3^n} \to 0$, $\cos n$ omezená, $\frac{1}{3^n} \to 0$

$= \frac{1 \cdot \sin(0)\cdot(1+0)}{9-0+0} = \frac{1\cdot 0 \cdot 1}{9} = 0$

3. (2 b) Na přiloženém obrázku 1 je vynesen graf funkce f. Určete:

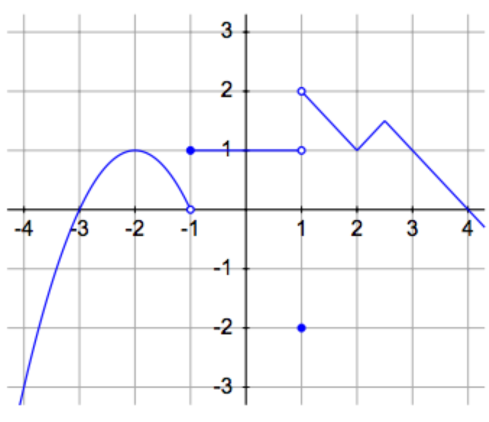
(a) $f(1) = -2$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to -1+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ nelze určit, máme informace o funkci $f(x)$ pouze na intervalu $[-4,4]$.



Obrázek 1: Obrázek k úloze 3.

4. (3 b) Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_n} = 0$. Která z následujících tvrzení musejí být pravdivá? Své stanovisko alespoň stručně zdůvodněte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; NE, jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_n} = 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0 : \left|\frac{n^2}{a_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| > \frac{n^2}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n| \to \infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; NE, pro $a_n = -e^n$ neplatí.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^n} = 0$; NE, pro $a_n = e^n$ neplatí.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$; NE, pro $a_n = -e^n$ neplatí

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = \infty$; NE, pro $a_n = n^3$ neplatí.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = 0$. NE, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a_n}{\ln n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{n^2}}_{\to 0} = 0$, což je ve sporu s předpokladem.