Jméno a příjmení: ____________________

Zápočtový test I. MAANCVST01

Před sebou máte zadání 1. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:
1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Mezi dovolené pomůcky patří: psací potřeby.
4. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:
1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 12:35 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Instrukce pro skupinovou fázi:
1. Nejpozději do 12:40 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–4 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 13:05 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Láska je pro mysl člověka složitější než matematika, mnohdy s neřešitelnými příklady.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	$\sum$
Možno získat:	7	4	2	3	16
Získáno:					

1. Určete:

   (a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}-n\right)$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}^2+\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}\cdot n+n^2}{\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}^2+\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}\cdot n+n^2} =$

   $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}-2n^2+1-\cancel{n^3}}{n^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}^2+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\cdot 1+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\cdot\left(-2+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(\sqrt[3]{1-\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}^2+\sqrt[3]{1-\underbrace{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}+1\right)} = \frac{-2}{3}$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{n\ to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n+4}$ $\overset{A}{=}\left(\frac{3n+1}{3n+1}-\frac{4}{3n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+1}\right)^{2n+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+1}\right)^{(3n+1)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} =$

   $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{4}\cdot\frac{8}{3}}\cdot\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{4}{3n+1}}_{0}\right)^{\frac{1}{3}}}_{=1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1-\frac{4}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{4}}}_{\to e^{-1}}\right)^{8/3} = e^{-\frac{8}{3}}$

   Jiné řešení:

   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(2n+1)\cdot\ln\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)} =$

   $= (*)\quad \lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)}{\frac{3n-3}{3n+1}-1}}_{1}\left(\frac{3n-3}{3n+1}-1\right)$

   $= \lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\cdot 1\cdot\frac{\cancel{3n}-3-\cancel{3n}-1}{3n+1} =$

   $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\left(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)(-4)}{3+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = -\frac{8}{3}$

   e^x spoj. fce

   $(*) = \lim\limits_{y\to-\frac{8}{3}} e^y = e^{-\frac{8}{3}}$

   (c) (3 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n};\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$

   Viz cvičení – posloupnosti, str. 3, úloha 2.i).

   (d) (2 bb) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^8-(n+4)^8}{(n+1)^8-(n-2)^8}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^8}+\binom{8}{1}\cdot n^7\cdot 2+o(n^7)-\left[\cancel{n^8}+\binom{8}{1}n^7\cdot 4+o(n^7)\right]}{\cancel{n^8}+\binom{8}{1}n^7+o(n^7)-\left[\cancel{n^8}+\binom{8}{1}n^7\cdot(-2)+o(n^7)\right]} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{8\cdot 2\cdot n^7-8\cdot 4\cdot n^7+o(n^7)}{8n^7+8\cdot 2\cdot n^7+o(n^7)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{8n^7}\cdot\left(-2+\underbrace{\frac{o(n^7)}{n^7}}_{0}\right)}{\cancel{8n^7}\left(3+\underbrace{\frac{o(n^7)}{n^7}}_{0}\right)}$

   $= \frac{-2}{3}$

2. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\ln n}{n^3+\sin n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}\cdot\frac{\frac{\ln n}{n}}{1+\frac{\sin n}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{\ln n}{n}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\sin n}_{\text{omezená}}\cdot\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}} = \frac{0}{1+0} = 0$

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})\cdot(2n^2+2)}{n^2-3n+\cos n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}\cdot\cancel{n^2}\cdot(2+\frac{2}{n})}{\cancel{n^2}(1-\frac{3}{n}+\cos n\cdot\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sin}^{\sin(x)\text{ spoj. fce}}(\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0})\cdot(2+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0})}{1-\underbrace{\frac{3}{n}}_{\text{ok}}+\underbrace{\cos n}_{\text{omezená}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = \frac{\sin(0)\cdot(2+0)}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0$

3. Na přiloženém obrázku 1 je vynesen graf lineárních funkcí f a g.

(a) (1 b) Lze určit hodnotu limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$? Pokud ano, tak ji určete.

(b) (1 b) Lze určit hodnotu limity $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$? Pokud ano, tak ji určete.

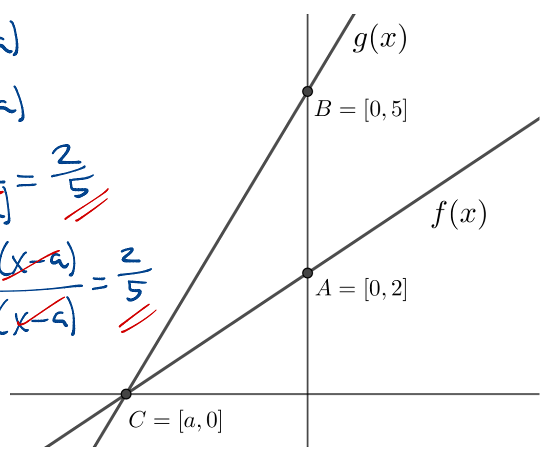
Své odpovědi řádně zdůvodněte.

$f(x) = C_1\cdot(x-a) = \frac{-2}{a}(x-a)$

$g(x) = C_2\cdot(x-a) = \frac{-5}{a}(x-a)$

a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{-2}{a}\cancel{(x-a)}}{\frac{-5}{a}\cancel{(x-a)}} = \frac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{a}\cancel{(x-a)}}{\frac{-5}{a}\cancel{(x-a)}} = \frac{2}{5}$



Obrázek 1: Obrázek k úloze 3.

4. (3 b) Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Která z následujících tvrzení musejí být pravdivá? Své stanovisko alespoň stručně zdůvodněte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; NE, např. $a_n = 1$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; NE, např. $a_n = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^n} = 0$; ANO, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\frac{a_n}{n}}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{n}{e^n}}^{\to 0} = 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$; NE, např. $a_n = \sqrt{n}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = 0$; ANO, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{n}{n!}}^{\to 0} = 0$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = 0$. NE, např. $a_n = \ln n$.