1. Uvažujme náhodnou veličinu X s hustotou $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ (exponenciální rozdělení).
   a) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$.
   b) Určete rozptyl var$X$.
   c) Určete pravděpodobnost, že $X > t, \quad t > 0$.
   d) Jaká je pravděpodobnost, že $X > t + s$ za podmínky $X > t$ $(t > 0, s > 0)$? Jinak řečeno, je-li například X doba čekání na příjezd autobusu, tak jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat ještě s minut, za podmínky, že jsme již čekali t minut?
2. Na autě jsou prováděny dvě nezávislé opravy a obě opravy budou hotovy do jedné hodiny. Předpokládejme, že obě opravy jsou v takové fázi, že rozdělení času do ukončení konkrétní opravy je rovnoměrné.
   a) Jaká je střední hodnota a rozptyl čekání na ukončení první opravy?
   b) Jaké je rozdělení doby do ukončení obou oprav?
   c) Určete pravděpodobnost, že obě opravy budou ukončeny do 45 minut.
   d) Uvažujme situaci, kdy opravy nebudou prováděny současně, ale postupně. Jaké rozdělení bude mít čas ukončení obou oprav?
   e) Uvažujme nyní n nezávislých oprav, jejichž doba má rovnoměrné rozdělení $R(0, 60)$. Nechť T_1 je čas, kdy bude dokončena první z oprav, a T_2 čas, kdy bude dokončena poslední z oprav. Jaké je rozdělení n.v. T_1 a T_2?
3. Uvažujme, že má náhodná veličina spojité rozdělení, které je bez paměti, tj. $P(X < t + s|X > s) = P(X < t)$. Dále předpokládáme, že pro hustotu tohoto rozdělení $f(t)$ platí:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad x < 0, \\ f(t) &> 0 \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

   a hustota f je spojitá na $[0, \infty)$. Jaký tvar tato hustota má a o jaké rozdělení se jedná?

Řešení

1. a)
$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx \overset{p.p.}{=} \left[-x\cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

b)
$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx \overset{p.p.}{=} \left[-x^2\cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx = 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c)
$$P[X>t] = 1 - F_X(t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_t^\infty = e^{-\lambda t}.$$

d)
$$P[X>t+s|X>t] = \frac{P[X>t+s, X>t]}{P[X>t]} = \frac{P[X>t+s]}{P[X>t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X>s].$$

Tento výsledek lze interpretovat tak, že exponenciální rozdělení nemá paměť.

2. Označme X_i čas v minutách, který musí majitel ještě čekat na dokončení i-té opravy, $i=1,2$. Za zadání plyne, že $X_i \sim R(0,60)$, tj. hustota rozdělení této náhodné veličiny je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{60}, \quad x\in(0,60),\\ &= 0, \quad x\notin(0,60). \end{aligned}$$

a)
$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^{60}\frac{x}{60}dx = 30.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}X_1 = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 &= \int_0^{60} x^2\frac{1}{60}dx - 30^2\\ &= \left[\frac{x^3}{180}\right]_0^{60} - 900 = 1200 - 900 = 300.\end{aligned}$$

Střední doba čekání na ukončení první opravy je tedy 30 minut, rozptyl je 300.

b) Označme X dobu do ukončení obou oprav, pak $X=\max\{X_1,X_2\}$. Určíme distribuční funkci náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(X<x) = P(X_1<x, X_2<x) = P(X_1<x)P(X_2<x)\\ &= \left(\int_0^x \frac{1}{60}dt\right)^2 = \left(\frac{x}{60}\right)^2 = \frac{x^2}{3600}.\end{aligned}$$

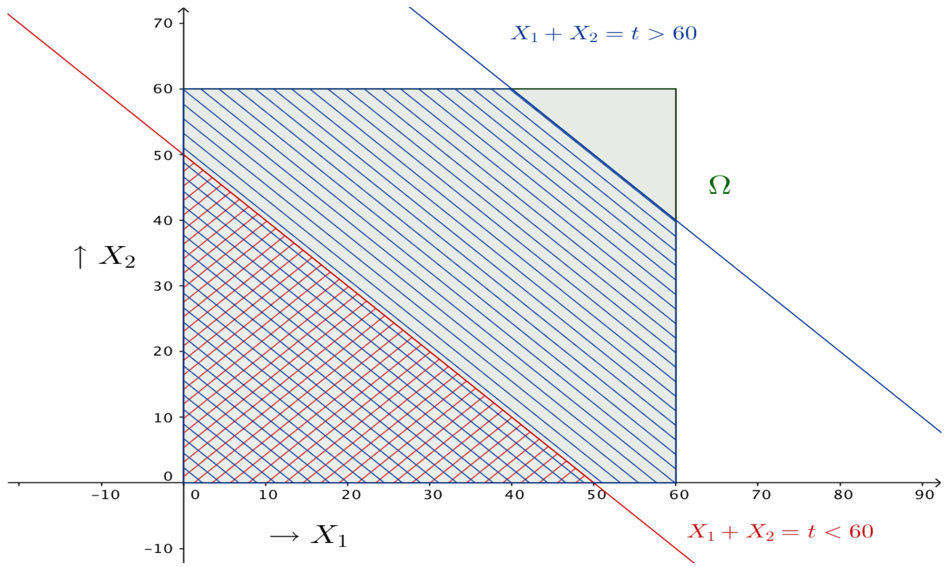
Z distribuční funkce F_X určíme hustotu f_X n.v. X.

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}F_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{3600} = \frac{x}{1800}, x\in(0,60.)$$

Rozdělení ukončení obou oprav je určeno uvedenou distribuční funkcí nebo ekvivalentně vypočítanou hustotou.

c)
$$P(X\le 45) = \int_0^{45}\frac{x}{1800}dx = \left[\frac{x^2}{3600}\right]_0^{45} = \frac{2025}{3600} = \frac{9}{16}.$$

d) Označme Y čas ukončení obou oprav, pak $Y = X_1 + X_2$. Sdružená hustota $f_{X_1,X_2}(x,y) = f_{X_1}(x)f_{X_2}(y) = \frac{1}{3600}$ pro $(x,y)\in[0,60]^2$ (Jelikož jsou n.v. X_1 a X_2 nezávislé). Pro jednoduchost rozdělíme výpočet na dvě situace.



Obrázek 1:
Zelený čtverec $[0, 60]^2$ zobrazuje množinu všech realizací náhodných veličin X_1, X_2 (tj. prostor Ω), červeně vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t < 60$ (část 1.), modře vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t > 60$ (část 2.).

1. $t \leq 60$, pak

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^t \int_0^{t-x} \frac{1}{3600} dy dx = \frac{1}{3600} \int_0^t (t - x) dx$$
$$= \frac{1}{3600} \left[\frac{(t-x)^2}{-2} \right]_0^t = \frac{t^2}{7200}, \quad t \in (0, 60),$$

tedy $f_Y(t) = \frac{t}{3600}, \quad t \in (0, 60)$.

2. $t > 60$, pak

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^{60} \int_0^{\min\{60, t-x\}} \frac{1}{3600} dy dx$$
$$= \frac{1}{3600} \left(\frac{t^2}{2} - (t-60)^2 \right) = \frac{1}{3600} \left(\frac{-t^2}{2} + 120t - 3600 \right) = -\frac{t^2}{7200} + \frac{t}{30} - 1,$$

tedy $f_Y(t) = -\frac{t}{3600} + \frac{1}{30}, \quad t \in (60, 120)$.

e) $T_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}$ a $T_2 = \max\{X_1, .., X_n\}$. Pak

$$F_{T_2}(x) = P(T_2 < x) = P(X_1 < x, ..., X_n < x) = \prod_{i=1}^n P(X_i < x) = \left(\int_0^x \frac{1}{60} dt \right)^n$$
$$= \left(\frac{x}{60} \right)^n,$$

$$f_{T_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{60} \right)^n = \frac{n x^{n-1}}{60^n},$$

$$F_{T_1}(x) = P(T_1 < x) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} < x) = 1 - P(\min\{X_1, ..., X_n\} \geq x)$$
$$= 1 - P(X_1 \geq x, ..., X_n \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n \int_x^{60} \frac{1}{60} dt$$
$$= 1 - \left(\frac{60 - x}{60} \right)^n$$

a
$$f_{T_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \left(\frac{60-x}{60}\right)^n\right) = \frac{n(60-x)^{n-1}}{60^n}.$$

3.

$$\begin{aligned}
P(X < t + s | X > s) &= P(X < t) \\
\frac{P(X < t + s, X > s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\
\frac{P(s < X < t + s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\
\frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_s^\infty f(x)dx} &= \int_0^t f(x)dx \\
\frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \int_s^\infty f(x)dx \\
\lim_{t\to 0+} \frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \lim_{t\to 0+} \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{f(s)}{f(0)} &= \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{\partial}{\partial s}\frac{f(s)}{f(0)} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{f'(s)}{f(0)} &= -f(s)
\end{aligned}$$

Dostaneme tedy diferenciální rovnici $f'(s) = -f(0)f(s)$, tedy $f(s) = Ce^{-f(0)s}$. Označme $\lambda = f(0)$, pak $f(s) = Ce^{-\lambda s}$. Jelikož $\int_0^\infty f(s)ds = 1$, dostaneme $C = \lambda$, tedy hustota má tvar $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, což je hustota exponenciálního rozdělení. Pokud tedy chceme spojité rozdělení na $[0, \infty)$ se spojitou hustotou, které nemá paměť, tak máme jedinou možnost a to exponenciální rozdělení.