1. Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením s hustotou $f(x) = Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$.
   a) Určete konstantu C.
   b) Jaká je střední hodnota náhodné veličiny X?
   c) Jaký je rozptyl n.v. X?
2. Nechť má náhodný vektor (X, Y) rovnoměrné rozdělení na množině $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   a) Určete sdruženou hustotu rozdělení vektoru (X, Y).
   b) Určete marginální hustotu $f_X(x)$ rozdělení n.v. X.
   c) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
3. Nechť má náhodný vektor (X, Y) rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$ na $\mathbb{R}^2$.
   a) Určete rozdělení n.v. X.
   b) Jsou n.v. X a Y nezávislé?

Řešení

1. a) Jelikož je f hustota, tak platí:

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

a proto

$$\frac{1}{C} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Jelikož ale neumíme přímo vypočítat integrál $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$, pomůžeme si následujícím trikem. Postupně použijeme substituce: $(*)\ \left| \begin{array}{ll} v = x-\mu, & w = y-\mu \\ dv = dx, & dw = dy \end{array} \right|$,

$(\star)\ \left| \begin{array}{ll} v = r\cos(\alpha), & w = r\sin(\alpha) \\ dvdw = rdrd\alpha & \end{array} \right|$, $(\bullet)\ \left| t = \frac{r^2}{2\sigma^2},\ dt = \frac{r}{\sigma^2}dr \right|$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dydx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2+w^2}{2\sigma^2}}dwdv \overset{(\star)}{=} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr\alpha dr \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr \overset{(\bullet)}{=} 2\pi\int_0^{\infty} e^{-t}\sigma^2 dt = 2\pi\sigma^2\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 2\pi\sigma^2.
\end{aligned}$$

Tedy

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{\left|\begin{array}{l} t = x-\mu \\ dv = dx \end{array}\right|}{=} \int_{\mathbb{R}} (t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt \\
&= \mu\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt + \int_{\mathbb{R}} t\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = {}^1\mu.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx - \mu^2 \\
&\overset{\left|\begin{array}{l} t = x-\mu \\ dv = dx \end{array}\right|}{=} \int_{\mathbb{R}} (t+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt - \mu^2 = \int_{\mathbb{R}} (t^2+2t\mu+\mu^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt - \mu^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt \overset{p.p.}{=} \left[t\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

2. a) Jelikož má n.v. (X,Y) rovnoměrné rozdělení na Ω, tak

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= c, \quad (x,y) \in \Omega \\
&= 0, \quad (x,y) \notin \Omega.
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} cdxdy = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}.$$

[1] První integrál je roven jedné, jelikož integrujeme hustotu, druhý je roven nule, jelikož integrujeme lichou funkci.

b)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}:x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{\pi}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in [-1,1].$$

c) X a Y jsou nezávislé, když $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Jelikož je úloha symetrická, tak $f_X(x) = f_Y(x)$. Dostáváme $f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq f_X(x)f_Y(x)$ pro $(x,y) \in [-1,1]^2 \setminus \Omega$, tedy veličiny X a Y jsou závislé. To lze také snadno nahlédnout z tvaru množiny Ω[2]

3. a)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2+(1-\rho^2)x^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}} dy \overset{3}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tedy $X \sim N(0,1)$.

b) Ze symetrie dostaneme $Y \sim N(0,1)$ a $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. To platí pouze pro $\rho = 0$, v ostatních případech jsou n.v. X a Y závislé.

[2] Aby mohly být n.v. X a Y nezávislé, tak by musela být tato množina obdelníková. Takto nabývá sice n.v. X hodnot z intervalu $[-1,1]$, ale pro konkrétní hodnoty y, kterých nabývá n.v. Y už nabývá n.v. X pouze hodnoty z intervalu $[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$.

[3] Jelikož $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}}$ je hustota normálního rozdělení s parametry $\mu = -\rho x$ a $\sigma^2 = 1-\rho^2$.