Příklady v tomto cvičení jsou včetně řešení převzaty z: http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/pms/PMScvic.pdf

1. Test obsahuje $n$ otázek, ke každé z nich jsou uvedeny $m = 4$ možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpoveď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme $X$ počet správně zodpovězených otázek.

   a) Určete pravděpodobnost $P(X = k), \quad k = 0, 1, ..., n$.

   b) Určete limitní pravděpodobnost $P(X = k), \quad k = 0, 1, ..., n$, pro $n \to \infty$ a při vzrůstajícím počtu možných odpovědí $m$ tak, aby $\frac{n}{m} \to \lambda$ ($\lambda > 0$ je pevně určený parametr).

2. Náhodně vybereme kladné celé číslo $N$, rozdělení pravděpodobnosti je $P[N = i] = 2^{-i}$. Poté hodíme $N$ kostkami. Nechť $S$ je součet hodnot, které při hodu padly.

   Určete podmíněné pravděpodobnosti $P[N = 2|S = 4]$ a $P[S = 4|N$ je sudé$]$.

3. a) Rodina má dvě děti, starší je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

   b) Rodina má dvě děti, (aspoň) jedno z nich je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

4. Jazykový korektor změní 99% chybných slov na správná a 0.01% správných na chybná. Změnil 2% slov. Odhadněte množství chybných slov v jeho výstupu.

# Řešení

1. a) Pravděpodobnost, že student odpoví dobře na konkrétní otázku, je $\frac{1}{4}$. Pravděpodobnost, že student odpoví na konkrétních $k$ otázek dobře a na zbylé špatně, je $\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$. Jelikož máme $\binom{n}{k}$ způsobů, jak vybrat z $n$ otázek $k$ otázek, tak
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k},$$
kde $k=0,1,...,n$.

b)
$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \lim_{n\to\infty,\frac{n}{m}\to\lambda}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}\\
&= \lim_{n\to\infty,\frac{n}{m}\to\lambda}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{n}{m}\right)^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{n}{m}}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty,\frac{n}{m}\to\lambda}\left(\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{n}{m}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty,\frac{n}{m}\to\lambda}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty,np\to\lambda}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\cdot\lim_{n\to\infty,np\to\lambda}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{n}{m}}\cdot 1=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

2.
$$P[N=2\mid S=4]=\frac{P[N=2,S=4]}{P[S=4]}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{216}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1296}},$$
$$P[S=4\mid N \text{ je sudé}]=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1296}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots}=\frac{4^2\cdot 3^3+1}{4^4\cdot 3^3}.$$

3. a) Jde o pravděpodobnost, že mladší z dětí je dcera, což nastává s pravděpodobností $q$ blízkou 1/2, přesněji asi 0.52. (Předpokládáme, že pohlaví dětí jsou nezávislá, což je přibližně správně.)

b) Pokud pro jednoduchost předpokládáme $q=1/2$, pak předpoklad $J$, že "rodina má aspoň 1 dceru," je splněn s pravděpodobností $P(J)=1-(1-q)^2=3/4$, ale to, že "rodina má 2 dcery," je podjev $D\subseteq J$ s pravděpodobností $P(D)=q^2=1/4=P(D\cap J)$. Podmíněná pravděpodobnost je
$$P(D|J)=\frac{P(D\cap J)}{P(J)}=\frac{P(D)}{P(J)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}\,.$$
Obecněji pro pravděpodobnost narození dívky $q$
$$P(D|J)=\frac{q^2}{1-(1-q)^2}\,,$$
pro $q=0.52$
$$P(D|J)=\frac{q^2}{1-(1-q)^2}\doteq 0.35\,.$$

4. Předtím pravděpodobnost chybného slova $p$. Opraveno
$0.99\cdot p+10^{-4}\cdot(1-p)=0.02$, $p=2.0103\cdot10^{-2}$. Po opravě chybně $0.01\cdot p+10^{-4}\cdot(1-p)=2.9902\cdot10^{-4}$.