1. a) Je náhodná veličina jednoznačně určena svým rozdělením?
   b) Je rozdělení náhodné veličiny jednoznačně určeno příslušnou distribuční funkcí?
   c) Mějme náhodnou veličinu X a funkci $f(x)$. Lze ze znalosti rozdělení náhodné veličiny X určit rozdělení náhodné veličiny $Y = f(X)$?
   d) Mějme dvě náhodná veličiny se stejným rozdělením. Musí být tyto náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru?
   e) Nabývá-li náhodná veličina spočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce po částech konstantní?
   f) Nabývá-li náhodná veličina nespočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce spojitá?
   g) Lze ze znalosti hustoty $f(x)$ rozdělení náhodné veličiny X určit příslušnou distribuční funkci?

Řešení

1. a) Ne. Uvažujme pravidelnou hrací kostku a nechť si dva různí lidé její strany označí čísly 1,…,6 tak, aby se značení alespoň na některých stranách neshodovalo. Pokud X je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k prvnímu značení, a Y je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k druhému značení, pak rozdělení těchto veličin je stejné ($P(X = k) = P(Y = k) = 1/6$ pro $k = 1, ..., 6$), ale náhodné veličiny X a Y nejsou stejné, jelikož $P(X = Y) < 1$ (existuje $\omega \in \Omega$ takové, že $X(\omega) \neq Y(\omega)$.

   b) Ano. $P_X((a, b)) = P(X \in (a, b)) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b) - \lim_{x \to a+} F(x)$.

   c) Ano. $P_Y((a, b)) = P(Y \in (a, b)) = P(f(X) \in (a, b)) = P(X \in f^{-1}((a, b))) = P_X(f^{-1}((a, b)))$, kde $f^{-1}(M)$ značí vzor množiny M při zobrazení f.

   d) Nemusí.

   e) Ano.

   f) Ne. Uvažujme náhodnou veličinu X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

   pak X nabývá nespočetně hodnot, ale F není spojitá funkce.

   g) Ano. Jelikož $f(x) = F'(x)$, pak $F(x) = \int f(x)dx$. Integrační konstanta je určena vztahem $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.