1. Uvažujeme diskrétní náhodnou veličinu X s rovnoměným rozdělením (žádnou z možných hodnot nepreferujeme), která nabývá hodnou $1, 2, ..., n$. Určete její rozdělení, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

2. Uvažujeme spojitou náhodnou veličinu X s rovnoměným rozdělením (žádnou z možných hodnot nepreferujeme), která nabývá hodnou z intervalu $[0, 2]$ (všech hodnot z intervalu $[0, 2]$). Určete rozdělení n.v. X, její hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

3. V peněžence máte dvě papírové pětisetkoruny, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícikorunovou bankovku. Zloděj vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.

   a) Určete rozdělení X, tj. jakých hodnot veličina X nabývá a s jakými pravděpodobnostmi.
   b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X.
   c) Zloděj následně zaplatí 1000 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme Y veličinu udávající částku, která zloději po tom všem zůstane. Určete rozdělení Y.
   d) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit večeři za 210 Kč?
   e) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$ a rozptyl var$X$.

Řešení

1. $P_X(k) = P(X = k) = \frac{1}{n}$ pro $k = 1, ..., n$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{k}{n}, & x \in (k, k+1], k = 1, ..., (n-1), \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

2.

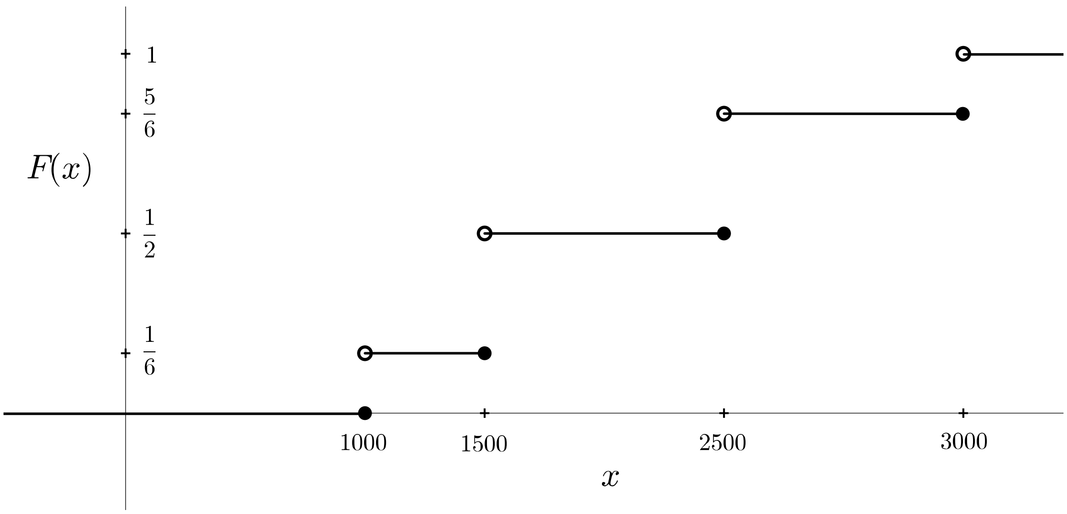
$$P_X((a,b)) = P(X \in (a,b)) = \frac{\min\{b, 2\} - \max\{a, 0\}}{2},$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & x \in (0, 2] \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases}$$
$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1,$$
$$\text{var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

3. a)

$$P(X = 1000 = (500 + 500)) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6},$$
$$P(X = 1500 = (1000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 2500 = (2000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 3000 = (2000 + 1000)) = \frac{1 \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

c) $Y = \frac{X - 1000}{5}$, tedy:

$$P(Y = 0) = P(X = 1000) = \frac{1}{6},$$
$$P(Y = 100) = P(X = 1500) = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 300) = P(X = 2500) = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 400) = P(X = 3000) = \frac{1}{6}.$$



b)

d)

$$P(Y > 210) = P(Y = 300) + P(Y = 400) = \frac{1}{2}.$$

e)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in S} k \cdot P(X = k) = 1000 \cdot \frac{1}{6} + 1500 \cdot \frac{1}{3} + 2500 \cdot \frac{1}{3} + 3000 \cdot \frac{1}{6} = 2000.$$

$$\mathrm{var}X = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}X)^2 \cdot P(X = k) = 1000^2 \cdot \frac{1}{6} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 1000^2 \cdot \frac{1}{6} = 500000.$$