NMTM101 - matematická analýza I.

October 7, 2020

- Podmínky zápočtu: Napsání dvou testů během semestru.
- Materiály na stránce: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/∼stanekj/
- Užitečné odkazy:
  https://www.wolframalpha.com
  http://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza
  https://kam.mff.cuni.cz/ sbirka
  https://www.geogebra.org/

Značení:

- $\mathbb{N}$ ... přirozená čísla $(1, 2, 3, \ldots)$.
- $\mathbb{Z}$ ... celá čísla $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$.
- $\mathbb{Q}$ ... racionální čísla ($\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{R}$ ... reálná čísla
- $\mathbb{C}$ ... komplexní čísla

Definition

Výrok je formule, která má nějakou pravdivostní hodnotu (má smysl rozhodnout, zda je toto tvrzení pravdivé nebo nepravdivé).
Pokud výrok platí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 1, v opačném případě říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0.

Example

Výrokem jsou například věty:

- "Součet dvou sudých čísel je sudé číslo."
- "Vsetín je největší město světa".

Naopak následující věty výroky nejsou.

- "Ať žije první máj!"
- "Učte se na zkoušky."

Definition

Nechť V a W jsou výroky, pak zavedeme pojmy

- $\neg$ ... negace (ne)
- $\wedge$ ... konjunkce (a)
- $\vee$ ... disjunkce (nebo)
- $\Rightarrow$ ... implikace
- $\Leftrightarrow$ ... ekvivalence

následující tabulkou:

V	W	$\neg V$	$V \vee W$	$V \wedge W$	$V \Rightarrow W$	$V \Leftrightarrow W$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Dále zaveďme kvantifikátory

- $\exists$ ... existenční kvantifikátor (existuje)
- $\forall$ ... obecný kvantifikátor (pro všechna)

Example

Negace implikovaná na výrok s kvantifikátorem:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : V(x)) &\Leftrightarrow \exists x : \neg V(x) \\ \neg(\exists y : W(y)) &\Leftrightarrow \forall y : \neg W(y) \end{aligned}$$

Například:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) &\Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{R} : \neg(\exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) &\Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : \neg(x = y + 1) &\Leftrightarrow \\ \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y + 1 & \end{aligned}$$

Uvedeme nepřesnou "naivní" definici množiny (George Cantor 1845-1918).

Definition

Množina je soubor objektů, které jsou přesně určené a různé a kde vždy nastává pouze jedna z následujících možností:

- $a \in M$ ... a patří do množiny M.
- $a \notin M$ .. a nepatří do množiny M.

Tyto objekty nazveme prvky množiny

Poznámka

Množina je svými prvky jednoznačně určena.

Definition

Nechť A a B jsou množiny.

- $A \subset B$ ... A je podmnožina množiny B, tj. $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.
- $A \cup B$ ... sjednocení množin A a B, tj. množina všech prvků x, které jsou alespoň v jedné z množin A, B. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B$ ... průník množin A a B, tj. množina všech prvků x, které jsou jak v A tak v B. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \setminus B$ ... rozdíl A a B, tj. množina všech prvků x, které leží v A a zároveň neleží v B. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\emptyset$ ... prázdná množina, tj. množina která neobsahuje žádný prvek.

Nechť A_i jsou množiny, pak

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{x : \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \{x : \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$

Theorem (de Morganova pravidla)

Nechť M, A_i jsou množiny a $A_i \subset M$, pak

- $M \setminus (A_1 \cup A_2) = (M \setminus A_1) \cap (M \setminus A_2)$
- $M \setminus (A_1 \cap A_2) = (M \setminus A_1) \cup (M \setminus A_2)$

a

- $M \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (M \setminus A_i)$
- $M \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (M \setminus A_i)$

Definition

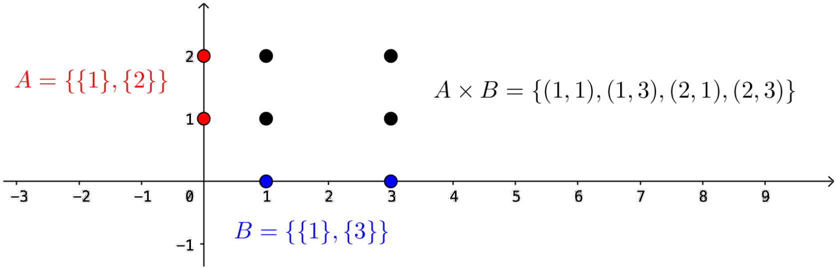
Kartézský součin A a B značený $A \times B$ je množina všech uspořádáných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$, tj. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Example

Nechť $A = \{\{1\}, \{2\}\}$ a $B = \{\{1\}, \{3\}\}$, pak

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

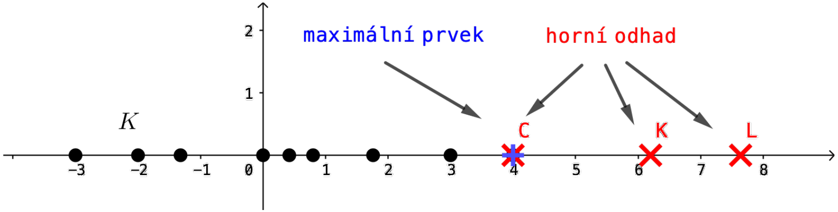
.



Definition

Nechť $K \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

- Řekněme, že m je horní odhad (horní závora) množiny K, právě tehdy, když $\forall x \in K : x \leq m$.
- Řekněme, že m je maximální prvek množiny K ($\max K$), právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \leq m$.
- Řekněme, že K je shora omezená, právě tehdy, když existuje horní odhad K.
- Řekněme, že m je supremum množiny K ($\sup K$), právě tehdy, když
  - $\forall x \in K : x \leq m$,
  - $\forall m' < m \; \exists x \in K : x > m'$.



Definition

Nechť $K \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

- Řekněme, že m je dolní odhad (dolní závora) množiny K, právě tehdy, když $\forall x \in K : x \geq m$.
- Řekněme, že m je minimální prvek množiny K ($\min K$), právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \geq m$.
- Řekněme, že K je zdola omezená, právě tehdy, když existuje dolní odhad K.
- Řekněme, že m je infimum množiny K ($\inf K$), právě tehdy, když
  - $\forall x \in K : x \geq m$,
  - $\forall m' > m\ \exists x \in K : x < m'$.
- Řekněme, že K je omezená, právě tehdy, když existuje horní i dolní odhad K $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in K : |x| < m$.

Example

$K = \{1, 2, 3\}$, pak $1 = \min K = \inf K$ a $3 = \max K = \sup K$.

Example

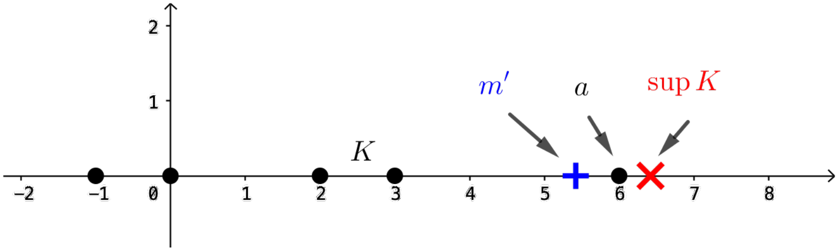
$K = \{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Pak $\min K = \inf K = 0$, $\sup K = 1$ a maximum K neexistuje. Skutečně, $0 \in K$ (pro $n = 1$) a $\frac{n-1}{n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, proto $0 = \min K = \inf K$. 1 je horní závora, neboť $1 > \frac{n-1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $m < 1$, pak pro n splňující $\frac{1}{n} < 1 - m$ dostaneme, že $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > 1 - (1 - m) = m$. Proto $\sup K = 1$ a $\max K$ neexistuje.

Example

$\emptyset \neq K \subset \mathbb{Z}$, K je shora omezená, potom $\sup K \in \mathbb{Z}$.

Proof.

Ukážeme, že $\sup K = \max K$. (Sporem) Nechť $\sup K \notin K$. Označme $m' = \sup(K) - 1 \Rightarrow \exists a \in K, a > m'$. Zároveň ale platí, že $a < \sup K$ (neboť $\sup K \notin K$). Pak ale $\exists b \in K$ takové, že $b > a$. Tedy $\sup K - 1 < a < b < \sup K$ a zároveň $a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ SPOR. □



Example

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená množina, necht' navíc $\sup A \notin A$, pak má A nekonečně mnoho prvků.

Proof.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \sup A - 1 && \Rightarrow \exists x_1 \in A : x_0 < x_1 \\
x_1 &< \sup A && \Rightarrow \exists x_2 \in A : x_1 < x_2 \\
x_2 &< \sup A && \Rightarrow \exists x_3 \in A : x_2 < x_3 \\
&\vdots \\
x_1 &< x_2 < x_3 < \cdots < \sup A
\end{aligned}
$$

$\square$

Otázka

- Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je shora neomezená množina. Lze nějak přirozeně definovat $\sup K$?
- Nechť $K = \emptyset$. Lze nějak přirozeně definovat $\sup K$?

Rozšířená definice suprema a infima:

Definition

Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je shora neomezená množina, tak její supremum definujeme jako $\sup K = \infty$.
Je-li $K \subset \mathbb{R}$ zdola neomezená množina, tak její infimum definujeme jako $\inf K = -\infty$.
Dále zavedeme $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = \infty$.

Zobrazení

Definition

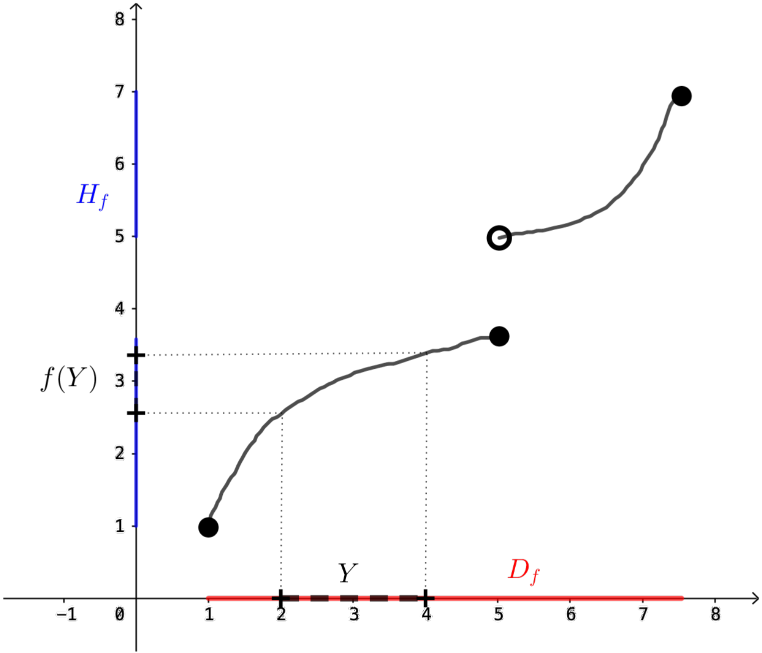
Nechť M, N jsou neprázdné množiny, pak $f \subset M \times N$ nazýváme zobrazení z množiny M do množiny N, jestliže

$$\forall x \in M \; \forall y_1, y_2 \in N : \; ([x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Pro přehlednost používáme pro zobrazení značení $f(x) = y$.
Definičním oborem zobrazení f nazýváme množinu

$$D_f = \{x \in M; \exists y \in N : f(x) = y\}.$$

Nechť $X \subseteq D_f$, pak $f(X) := \{y \in N, \exists x \in X : f(x) = y\}$ nazýváme obraz množiny X při zobrazení f.
Nechť $Y \subseteq N$, pak $f^{-1}(Y) := \{x \in D_f, \exists y \in Y : f(x) = y\}$ nazýváme vzor množiny Y při zobrazení f.
$f(D_f)$ nazýváme obor hodnot zobrazení f a značíme H_f.


8
7
6
H_f
5
4
$f(Y)$
3
2
1
Y
D_f
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Poznámka

Nechť M a N jsou množiny, pak symbolem $f : M \to N$ značíme fakt, že

- f je zobrazení z množiny M do množiny N,
- M je definiční obor zobrazení f,
- Obor hodnot f je podmnožinou množiny N.

Poznámka - Speciální případy:

- Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme reálnou funkcí reálné proměnné.
- Je-li $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme posloupností reálných čísel.

Definition

Nechť $f : M \to N$.

- f je prosté zobrazení, jestliže $x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f je zobrazení na, jestliže $\forall y \in N \; \exists x \in D_f : y = f(x)$.
- f je bijekce, jestliže je prosté a na.
- f je identita (značíme I), jestliže $\forall x \in D_f, f(x) = x$.
- f je konstantní zobrazení, jestliže $\exists c \in N$ takové, že $\forall x \in D_f, f(x) = c$.
- Nechť f je prosté zobrazení, pak $f^{-1} : H_f \to D_f$ takové, že $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}$ $(y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y))$, je inverzní zobrazení k zobrazení f.
- Řekněme, že zobrazení f a g se rovnají, jestliže $D_f = D_g$ a $f(x) = g(x), \forall x \in D_f$.
- Nechť $D_f \subset D_g$ a $f(x) = g(x) \; \forall x \in D_f$, pak f je zúžením zobrazení g a g je rozšířením zobrazení f. Je-li $D_f = B$, značíme $f = g|_B$.

Example

Nechť $f(x) = x^2 \ \forall x \in D_f$, pak pro $D_f = \mathbb{R}^+$ je f prosté zobrazení, pro $D_f = \mathbb{R}$ f není prosté ($f(-1) = f(1)$).
Nechť $D_f = \mathbb{R}$, pak pro $N = \mathbb{R}^+$ je f zobrazení na, pro $N = \mathbb{R}$ není na (např. $y = -3$).

Definition

Nechť $f : M \to N$, $g : N \to P$. Pak zobrazení $g \circ f : M \to P$ takové, že $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in M$, se nazývá složené zobrazení, kde f nazýváme vnitřním zobrazením a g nazýváme vnějším zobrazením.

Example

Nechť $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$, pak $f \circ g(x) = \sin x^2$ a $g \circ f(x) = \sin^2 x$.

Otázka:

- Nechť $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, pak $f^{-1}(x) = \ln x$. Rovnají se zobrazení $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$?

Posloupnosti

Definition

Zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme posloupností (reálných čísel). Značíme $\{a_1, a_2, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}$.

Definition

Posloupnost $\{a_n\}$ je

- konstantní, jestliže $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a$.
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.
- monotónní, jestliže platí jedna z předchozích variant.
- shora omezená, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n < K$.
- zdola omezená, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n > K$.
- omezená, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$.

Example

Posloupnost $a_n = 3 + 2n$ (aritmeticka posloupnost) je rostoucí, zdola omezená.

Example

Posloupnost $a_n = \frac{n-1}{n}$ je rostoucí a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &< n^2 \\ (n-1)(n+1) &< n^2 \\ a_n = \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

navíc $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$.

Otázka:

- Je geometrická posloupnost $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ monotónní?
- Je geometrická posloupnost omezená?

Otázka:

- Které z následujících výroků jsou ekvivalentní z výrokem: "Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená"?
  a) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora i zdola.
  b) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.
  c) Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.

Otázka:

Necht' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n > n_0 : \ |a_n| < K$.

- Je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená?