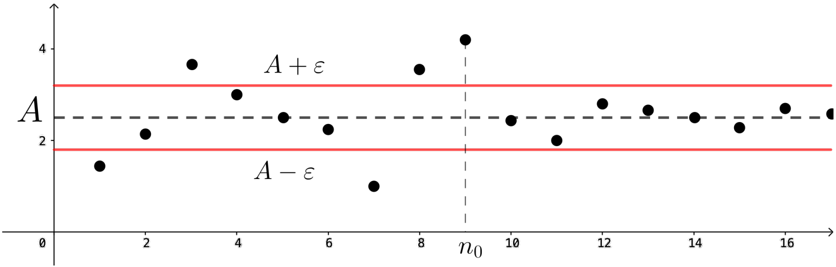
NMTM101 - matematická analýza I.

October 9, 2020

Definition

Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon$. Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo $a_n \to A$.
Řekněme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, má-li vlastní limitu, tj. existuje-li $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, říkáme, že diverguje (je divergentní).



Example

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Proof.

Chceme ukázat: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 :\ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.
Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme n_0. Chceme, aby $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. □

Example

Posloupnost $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \ldots$ nemá limitu.

Proof.

SPOREM: Nechť existuje limita této posloupnosti. Označme ji A. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, pak $|a_{2n-1} - a| = |1 - A| < \frac{1}{4} \Rightarrow A \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$. Zároveň platí, že $|a_{2n} - A| < \frac{1}{4}$ a $\forall n \in \mathbb{N} : a_{2n} \leq \frac{1}{2}$, tedy $A \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$ SPOR. □

Otázka:

Rozhodněte o platnosti tvrzení: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$.

Odpověď:

Tvrzení je pravdivé.

Proof.

($\Rightarrow$) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tak $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$, tedy stačí volit $K = 1$.

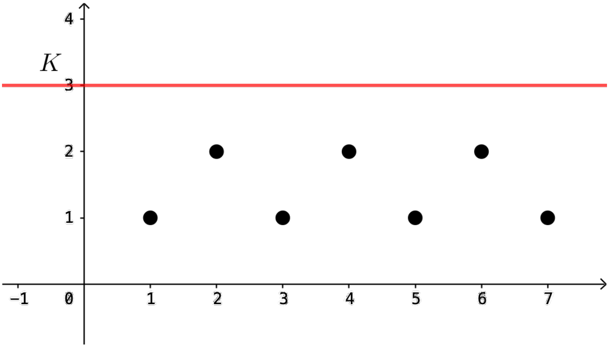
($\Leftarrow$) Nechť existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall\tilde{\varepsilon} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon}$. Mějme $\varepsilon > 0$. Pak pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

$\square$

Otázka:

Který z následujících výroků je ekvivalentní s výrokem: "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"? Správě může být více odpovědí.

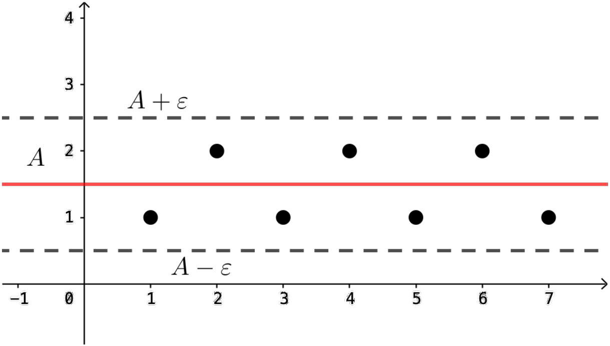
- $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| > K$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - A| > \varepsilon$.



Otázka:

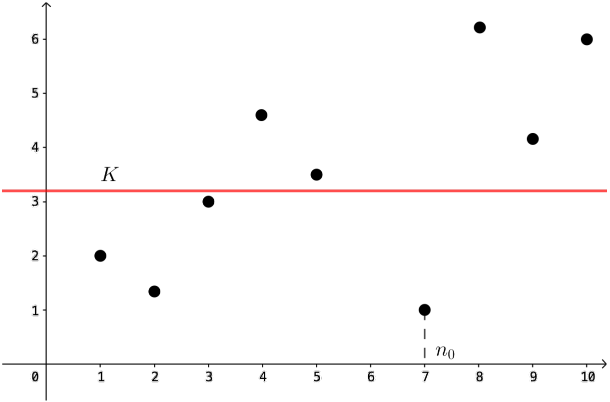
Který z následujících výroků je ekvivalentní s výrokem: "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"? Správě může být více odpovědí.

- $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| > K$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.
- $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - A| > \varepsilon$.



Definition

Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n > K$ (resp. $a_n < K$). Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).



Example

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Stačí zvolit $n_0 = \lceil K \rceil$.

Definition

Označme $\mathbb{R}^*$ množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Theorem (Existence suprema)

Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ *má supremum.*

Theorem (Jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Proof.

- Nechť $a_n \to A$, $a_n \to B$ a $A \neq B$ (obě limity vlastní). BÚNO $B > A$, volme $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ $|a_n - A| < \frac{B-A}{3}$ a $|a_n - B| < \frac{B-A}{3}$, tedy $a_n \in (A - \frac{B-A}{3}, A + \frac{B-A}{3}) \cap (B - \frac{B-A}{3}, B + \frac{B-A}{3}) = \emptyset \Rightarrow$ SPOR.
- Nechť $a_n \to A$ je vlastní a zároveň $a_n \to \infty$. Pak pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a zároveň pro každé $K \in \mathbb{R}$ $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > \tilde{n}_0 : a_n > K$. Zvolme $K > a + \varepsilon$, pak pro $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $a_n < a + \varepsilon$ a zároveň $a_n > a + \varepsilon \Rightarrow$ SPOR. Obdobně pro $a_n \to a$ a $a_n \to -\infty$.
- Nechť $a_n \to \infty$ a $a_n \to -\infty$. Zvolme libovolné $K \in \mathbb{R}$, pak $a_n > K$ pro $n > n_0$ a zároveň $a_n < K$ pro $n > \tilde{n}_0 \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Theorem (O limitě monotónní posloupnosti)

Nechť a_n je monotónní posloupnost.

i) *Je-li posloupnost a_n omezená, pak existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

ii) *Je-li posloupnost a_n neomezená neklesající, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

iii) *Je-li posloupnost a_n neomezená nerostoucí, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Proof.

i) a_n omezená a neklesající, pak existuje $s = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje a_{n_0} takové, že $a_{n_0} > s - \varepsilon$, tedy $\forall n > n_0$ platí $s - \varepsilon < a_n \leq s$ $\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = s$. Obdobně pro nerostoucí posloupnosti.

ii) Je-li a_n neklesající a neomezená, pak $a_n \geq a_1$, tedy a_n je omezená zdola $\Rightarrow$ a_n není omezená shora. Zvolme K, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > K$, z monotónie plyne $\forall n > n_0$: $a_n \geq a_{n_0} > K$.

iii) Důkaz obdobně jako v předešlém případě.

$\square$

Theorem

Každá konvergentní posloupnost je omezená. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*), pak je posloupnost* a_n *omezená zdola (resp. shora).*

Proof.

- Necht' a_n je konvergentní, pak existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\varepsilon = 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0$: $|a_n - A| < 1$, tedy $\forall n > n_0$: $a_n < A + 1$. Pro $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A + 1\} + 1$ tedy platí, že $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n > M$.
- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak stačí zvolit K, k němu najdeme n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n > K$. Zvolme $M = \min\{a_1, \dots, a_{n_0}, K\} - 1$, pak $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > M$.
  Obdobně u nevlastní limity $-\infty$.

$\square$

Theorem

Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *a necht' existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : a_n = b_n$. *Pak platí:*

i) *Necht'* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) *Necht'* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Proof.

i) Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n > n_0$ platí $a_n = b_n$, tak $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : |b_n - A| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) Mějme $K \in \mathbb{R}$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : a_n > K$. Tedy $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : b_n > K$, proto $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

□

Poznámka

Předchozí větu lze interpretovat i takto. Změníme-li u posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, tak její limitu nezměníme.

Theorem ("O dvou policajtech")

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou tři posloupnosti, pro něž platí*

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :\ a_n \leq b_n \leq c_n$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}^*$,

pak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Proof.

- $A \in \mathbb{R}$. Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$ a také existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_2 : |c_n - A| < \varepsilon$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1, n_2\} :\ A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak $\forall n > n_0$: $b_n \geq a_n > K$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Obdobně pro $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

$\square$

Theorem

Nechť posloupnosti $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *mají limity (vlastní či nevlastní) a* $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq b_n$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Proof.

(Sporem) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, pak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n > q > \lim_{n\to\infty} b_n$. Tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $(a_n > q \wedge b_n < q)$, což je spor s předpokladem $a_n \leq b_n$. □

Theorem (O limitě součtu)

Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B.$$

Proof.

Mějme $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $\forall n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $|a_n + b_n - (A + B)| \le |a_n - A| + |b_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$