NMTM101 - matematická analýza I.

October 17, 2020

Theorem

Necht' posloupnosti $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *mají limity (vlastní či nevlastní) a* $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq b_n$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Otázka:

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A < \lim_{n\to\infty} b_n = B$ ($A, B \in \mathbb{R}^*$). Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

Otázka:

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \leq \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

Theorem (O limitě součinu)

Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Proof.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n - A)(b_n - B) + Ab_n + a_n B - 2AB| \\ &= |(a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leq |(a_n - A)(b_n - B)| + |A(b_n - B)| + |(a_n - A)B| \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon > 0$ stačí najít n_0^1, n_0^2 a n_0^3 takové, že:

- $\forall n > n_0^1 : |(a_n - A)(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^2 : |A(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^3 : |B(a_n - A)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pak volíme $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2, n_0^3\}$. $\square$

Lemma

Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \neq 0$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

Proof.

BÚNO $B > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : b_n > \frac{B}{2}$. Tedy $\forall n > n_0$ platí

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right| \leq \frac{2|B - b_n|}{B^2}.$$

Mějme $\varepsilon > 0$ a nechť pro $\forall n > \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ platí $|B - b_n| < \frac{\varepsilon B^2}{2}$, pak $\forall n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| \leq \frac{2|B - b_n|}{B^2} < \varepsilon.$$

$\square$

Theorem (O limitě podílu)

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Proof.

Viz předchozí lemma a věta o limitě součinu.
$(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{A}{B})$ $\square$

Otázka:

Necht' $A \in \mathbb{R}$. Který z následujících výroků je ekvivalentní výroku $\lim_{n\to\infty} a_n = A$?

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

Odpoved':

Oba výroky jsou ekvivalentní s výrokem $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Stačí pracovat s tím, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a pak si uvědomit, že $(|a_n - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|(a_n - A) - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow ||a_n - A| - 0| < \varepsilon$.

Otázka:

Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $A \in \mathbb{R}$. Jsou následující výroky ekvivalentní?

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Odpověď:

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : ||a_n| - |A|| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. Zde vycházíme s nerovnosti $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Mějme $\{a_n = (-1)^n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, ale $\lim_{m\to\infty} |a_n| = 1$. Na tomto protipříkladu vidíme, že výrok $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$ neimplikuje výrok $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy výroky nejsou ekvivalentní.

Lemma

Je-li posloupnost a_n omezená zdola (resp. shora) a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty \ (\textit{resp.} \ -\infty).$$

Proof.

Existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > L$ a $\forall K \ \exists n_0 \forall n > n_0 : b_n > K$.
Mějme $M \in \mathbb{R}$, pak pro volbu $K = M - L$ dostáváme
$\forall n > n_0 : \ a_n + b_n > L + K = L + (M - L) = M$, tedy $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

$\square$

Lemma

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená posloupnost, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$ a $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$.
Mějme $\varepsilon > 0$, pak $\forall n > n_0 : |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n|K \leq \varepsilon K$.
Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. $\square$

Lemma

Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$.

i) *Existuje-li* $\alpha > 0$ *a* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : \ a_n \geq \alpha$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *(resp.* $-\infty$*), pak*
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \text{ (\textit{resp.} } -\infty).$$

ii) *Existuje-li* $\alpha < 0$ *a* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : a_n \leq \alpha$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *(resp.* $-\infty$*), pak*
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty \text{ (\textit{resp.} } -\infty).$$

iii) *Je-li* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*(resp.* $-\infty$*), pak*
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty \text{ (\textit{resp.} } \mp\infty).$$

Proof.

i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_1\ \forall n > n_1 : b_n > K$.
Mějme $M > 0$ a volme $K = \frac{M}{\alpha}$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : a_n b_n > \alpha K = M$.
Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

ii) Viz i)

iii) Plyne z i) a ii).

$\square$

Lemma

Necht' $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

Proof.

$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |b_n| > K$.
Mějme $\varepsilon > 0$, pak pro volbu $K = \frac{1}{\varepsilon}$ dostáváme:
$\forall n > n_0 : \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| = \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

$\square$

Lemma

Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\forall n > n_0 :\ b_n > 0$ (*resp.* $b_n < 0$), *pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \ (\textit{resp.}\ -\infty).$$

Proof.

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_1 : |b_n| < \varepsilon$. Přidáme-li předpoklad $\forall n > n_0 : b_n > 0$, dostaneme $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : 0 < b_n < \varepsilon$.
Mějme $K > 0$, pak pro volbu $\varepsilon = \frac{1}{K}$ dostaneme, že
$\forall n > \max\{n_0, n_1\} : \frac{1}{b_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$.

□

Definition

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ definujme

$$
\begin{aligned}
-\infty < a < \infty \\
a \pm \infty &= \pm\infty \\
a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \quad \text{pro } a > 0 \\
a \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \quad \text{pro } a < 0 \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0 \\
\frac{\pm\infty}{b} &= \pm\infty \quad \text{pro } b > 0 \\
\frac{\pm\infty}{b} &= \mp\infty \quad \text{pro } b < 0 \\
|\pm\infty| &= \infty \\
+\infty + \infty &= \infty \\
-\infty - \infty &= -\infty \\
+\infty \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\
-\infty \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty
\end{aligned}
$$

Poznámka:

Nedefinujeme výrazy: $0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, 0^0, ∞^0 a 1^∞.

Theorem (O aritmetice limit - první část)

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti, potom platí:

i)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

ii)
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

iii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Theorem (O aritmetice limit - druhá část)

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ *jsou posloupnosti, potom platí:*

iii') *Je-li* $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (*resp.* < 0), *pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \ (\textit{resp.} \ -\infty).$$

iii") *Je-li* $b_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (*resp.* < 0), *pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty \ (\textit{resp.} \ +\infty).$$

Proof.

i) $(A+B)$: věta o limitě součtu konvergentních posloupností,
$(A+\infty)$: věta o omezenosti konvergentní posloupnosti + lemma o součtu omezené posloupnosti s posloupností, která diverguje k nekonečnu (k mínus nekonečnu),
$(\infty+\infty)$: věta "posloupnost divergujíci k nekonečnu je omezená zdola + lemma o součtu omezené posloupnosti s posloupností, která diverguje k nekonečnu. Podobně pro $(-\infty-\infty)$.

ii) $(A \cdot A)$: věta o součinu konvergentních posloupností,
$(A(\pm\infty))$ a $(\infty \cdot (\pm\infty))$: lemma "$a_n > \alpha + \mathit{lim}\ b_n = \infty$".

iii) $(\frac{A}{\pm\infty})$: lemma "$\lim b_n = \infty \Rightarrow \lim \frac{1}{b_n} = 0$" + lemma "limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti konvergující k nule".
$(\frac{\pm\infty}{B})$: lemma "limita součinu omezené poslopnosti $(b_n \geq \alpha > 0)$ a posloupnosti divergující k nekonečnu."

$\square$

Proof.

iii') lemma "$\lim b_n = 0,\ b_n > 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{b_n} = \infty$" + lemma "součin omezené posloupnosti ($a_n \geq \alpha > 0$) a posloupnosti divergující k nekonečnu".

iii") Podobně jako iii').

$\square$

Example

Nechť $a_n = n$ a $b_n = \frac{k}{n}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = k$. Tuto limitu však nelze určit z limit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (neurčitý výraz $\infty \cdot 0$).

Example

Mějme libovolné $k \in \mathbb{R}$ a nechť $a_n = n$ a $b_n = k - n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = k$. Tuto limitu však nelze určit z limit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ (neurčitý výraz $\infty - \infty$).

Example

Nechť $a_n = n$ a $b_n = n^2$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Je-li naopak $a_n = n^2$ a $b_n = n$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Pro $a_n = kn$ a $b_n = n$ zase dostaneme $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Vždy jde o neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$.

Example

Uvažujme $a > 0$. Pro $a_n = \frac{1}{n}$ dostaneme $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot n = \infty$. Pro $a_n = \frac{-1}{n}$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n} = -\infty$ a pro $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ limita $lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n}$ neexistuje. Vždy jde o neurčitý výraz $\frac{a}{0}$.