NMTM101 - matematická analýza I.

October 26, 2020

Example

Dokažte, že

a) $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ pro $a > 1$,

b) $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ pro $k \in \mathbb{R}, a > 1$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^k} = 0$ pro $k \in \mathbb{R}$.

Proof.

a) $a^n > K \Rightarrow n > \log_a K$.

b) $n! \geq n$ a $n \to \infty$.

c) Jelikož $\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} = \frac{n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k}}{a^{n+1}} = \frac{n^k}{a^n} \frac{1 + \binom{k}{1}/n + \ldots \binom{k}{k}/(n^k)}{a}$ a $\frac{1 + \binom{k}{1}/n + \ldots \binom{k}{k}/(n^k)}{a} \to \frac{1}{a} < 1$, pak $a_n > a_{n+1}$ pro n dostatečně velké $\Rightarrow$ existence vlastní limity ($\{a_n\}$ klesající a nezáporná). Je-li $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to} a_n \frac{1}{a} = \frac{\alpha}{a}$, tedy $\alpha = 0$.

d) $a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \frac{a}{n+1} = a_n \frac{a}{n+1}$, tedy $a_n > a_{n+1}$ pro $n > a - 1$ a $lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$.

e) Jelikož $\sqrt[n]{n} > 1$, pak $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, tedy $n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > \binom{n}{2} h_n^2$ $\Rightarrow h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, proto $h_n \to 0$, a tedy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

f) Dokážeme později.

$\square$

Definition

Označme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Tomuto číslu říkáme Eulerovo číslo.

Example

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Definition

Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost a $k_1, k_2, \ldots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $\{b_n = a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme vybranou (pod)posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$.

Otázka:

Nechť je $\{k_n\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Platí následující tvrzení? $\forall n \in \mathbb{N} : k_n \geq n$?

Theorem

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, *pak každá vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$ *má také limitu* A.

Proof.

Nechť $A \in \mathbb{R}$, pak $\forall n > n_0 : a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, tedy $\forall n > n_0 : a_{k_n} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, jelikož $k_n \geq n$. Obdobně pro nevlastní limitu.

$\square$

Otázka:

Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

b) Mějme $m \in \mathbb{N}$ a nechť je posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

c) Nechť konverguje každá vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

d) Nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \in \mathbb{R}^*$ a platí rovnost $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Odpověď:

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, ale limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

b) Tvrzení platí. Posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, tedy $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_{m+n} - A| < \varepsilon$. A tedy $\forall n > (n_0 + m) : |a_n - A| < \varepsilon$.

c) Tvrzení platí. Stačí si uvědomit, že $\{a_n\}$ je také vybraná posloupnost z $\{a_n\}$.

d) Tvrzení platí. Pro $A \in \mathbb{R}$ dostaneme, že $\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : (|a_{2n} - A| < \varepsilon \wedge |a_{2n+1} - A| < \varepsilon)$, tedy $\forall n > 2n_0 + 1 : ||a_n - A| < \varepsilon)$. Podobně pro $A = \pm\infty$.

Example

Uvažujme posloupnost $a_n = (-1)^n$. Pak lze ukázat, že $\lim a_n$ neexistuje. Stačí si uvědomit, že $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ a $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$. Tedy dvě podposloupnosti této posloupnosti mají různé limity. Pokud by posloupnost $\{a_n\}$ měla limitu A, tak by dle předchozí věty musely platit obě rovnosti $A = 1$ a $A = -1$, což není možné.

Definition

Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, pokud existuje vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ označíme $H(\{a_n\})$.

Theorem

Mějme posloupnost reálných čísel, pak $H(\{a_n\}) \subseteq \mathbb{R}^*$ má maximum i minimum.

Poznámka

Poznamenejme, že pro shora neomezenou posloupnost $\{a_n\}$ je $\max H(\{a_n\}) = \infty$ a pro zdola neomezenou posloupnost $\{a_n\}$ je $\min H(\{a_n\}) = -\infty$.

Otázka:

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost přirozených čísel. Platí následující tvrzení?

a) Necht' $\{a_{k_n}\}$ je nějaká podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{k_n}\})$.

b) $H(\{a_n\}) = H(\{a_{2n}\})$ (Množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ se rovná množině hromadných hodnot posloupnosti $\{a_{2n}\}$, tj. posloupnosti sudých členů z posloupnosti $\{a_n\}$).

c) Mějme $m \in \mathbb{N}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

Odpověd':

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $H(\{a_n\}) = \{1, -1\}$, ale $H(\{a_{k_n}\}) = \{1\}$.

b) Toto tvrzení neplatí, viz bod a).

c) tvrzení platí. Jelikož $\{a_{m+n}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak každá podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}$ je také podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy $H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}) \subseteq H(\{a_n\})$. Nechť $A \in H(\{a_n\})$, pak existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$, která má limitu $A = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$. Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : k_{m+n} \geq m + n$, tak $\{a_{k_{m+n}}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ a jelikož $\lim_{n\to\infty} a_{k_{n+m}} = A$ (věta o limitě vybrané podposloupnosti), pak $A \in H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$, tedy $H(\{a_n\}) \subseteq H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

Definition

Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Pak limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ budeme nažývat největší hromadnou hodnout této posloupnosti a budeme ho značit $\limsup_{n\to\infty} a_n$, tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}).$$

Nejmenší hromadnou hodnotu této posloupnosti nazýváme limes inferior a značíme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}).$$

Poznámka

lze dokázat následující tvrzení:
$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\limsup_{n\to\infty} a_n = A = \liminf_{n\to\infty} a_n)$.

Poznámka

Limes superior a limes inferior lze také definovat následujícím způsobem:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ +\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora neomezená,} \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k > n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Proof.

- Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená, pak $(\forall L \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > L) \Rightarrow (\forall L \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m : a_n > L)$. Tedy lze vytvořit podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$ následujícím způsobem: $a_{k_1} = a_1$ a $k_n := \{m; m > k_{n-1}, a_m > n\}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$, tedy $\infty \in H(\{a_n\})$, proto $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}) = \infty$.
- Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a označme $A = \max H(\{a_n\})$. Pak $A \in \mathbb{R}$ a existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ konvergující k A. Jelikož $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n_0 : a_{k_m} > A - \varepsilon$, pak $\sup\{a_{k_m}; m > n\} \geq A$, navíc $\{a_{k_m}; m > n\} \subseteq \{a_k; k > n\}$, tedy $\sup\{a_k; k > n\} \geq \sup\{a_{k_m}; m > n\} \geq A$, a proto $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\} \geq A$.
  Označme $B = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\}$ a žvolme $k_1 = 1$. Postupně volme k_n následujícím způsobem. Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m > n_0 : |\sup\{a_k; k > m\} - B| < \frac{1}{n}$. Označme $m' = \max\{n_0 + 1, k_{n-1} + 1\}$, pak i $|\sup\{a_k; k > m'\} - B| < \frac{1}{n}$, a tedy existuje $k > m'$ takové, že $B - \frac{1}{n} < a_k \leq B$. Při volbě $k_n = k$ dostaneme posloupnost $\{a_{k_n}\}$, která konverguje k B, a tedy je $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\} = B \leq A$. Tím je důkaz hotov.

$\square$

Funkce

Definition

Reálnou (komplexní) funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Example

$$f(x) = \sqrt{x}$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. $D_f = [0, \infty)$ (definiční obor), $H_f = [0, \infty)$ (obor hodnot), (prosté zobrazení).

$$f(x) = x^2$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$ (definiční obor), $H_f = [0, \infty)$ (obor hodnot).

$$f(x) = x^3$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$ (definiční obor), $H_f = \mathbb{R}$ (obor hodnot).

Definition

Nechť f_1 a f_2 jsou dvě funkce. Potom jejich součtem $f_1 + f_2$, rozdílem $f_1 - f_2$, součinem $f_1 \cdot f_2$ a podílem $\frac{f_1}{f_2}$ nazveme funkce:

$$(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x), \quad x \in D_{f_1 \pm f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2},$$
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x), \quad x \in D_{f_1 \cdot f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2},$$
$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad x \in D_{\frac{f_1}{f_2}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \setminus \{x : f_2(x) = 0\}.$$

Definition

Funkce f se nazývá omezená na $M \subset D_f$, je-li množina $\{f(x)\}_{x \in M}$ omezená.

Example

Funkce $f = \frac{1}{x}$ je omezená na $[1, \infty)$, ale není omezená na $(0, 1]$.

Limita a spojitost funkce

Definition

Nechť f je nějaká funkce a $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je limita funkce f v bodě a právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) : |f(a) - A| < \varepsilon$. Používáme značení $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámka

Z definice je patrné, že limita funkce f v bodě a nezávisí na hodnotě funkce f v bodě a. Funkce f nemusí být dokonce ani definovaná v bodě a.

Definition

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Následujícím způsobem zavedeme pojem okolí bodu.

$$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{... } (\varepsilon\text{-ové) okolí bodu } a,$$
$$U^*_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \quad \text{... } (\varepsilon\text{-ové) prstencové okolí bodu } a,$$
$$U_\varepsilon(\infty) = U_\varepsilon(\infty)^* = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty) \quad \text{... okolí bodu } +\infty,$$
$$U_\varepsilon(-\infty) = U_\varepsilon(-\infty)^* = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \quad \text{... okolí bodu } -\infty.$$

Definition

Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$, pak limita funkce f v bodě a je A (značení $\lim_{n\to a} f(x) = A$) právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U^*_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Example

Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, pak z předchozí definice dostaneme

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in U^*_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Tedy obecná definice limity odpovídá předešlé definici pro $a, A \in \mathbb{R}$.

Example

Ukažte, že $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Mějme $\varepsilon > 0$, $|x^2 - 4| \leq |x-2||x+2| \leq \delta(4+\delta)$ pro $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, tedy $\varepsilon = \delta^2 + 4\delta$, a tedy $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$.