NMTM101 - matematická analýza I.

October 31, 2020

Definition

f se nazývá spojitá v bodě $a \in D_f$, je-li $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Theorem (Heineho)

a) *Necht' $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $a, A \in \mathbb{R}^*$, pak pro každou posloupnost $\{x_n\}, x_n \neq a$ a $x_n \to a$ platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

b) *Necht' pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující $x_n \neq a$ a $x_n \to a$, má posloupnost $\{f(x_n)\}$ limitu. Pak limity všech těchto posloupností jsou stejné a jejich společná limita A je také limitou funkce f v bodě a.*

Proof.

a) Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in U_\delta(a)^* : f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Jelikož $x_n \neq a$ a $x_n \to a$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0 : x_n \in U_\delta(a)^*$, proto $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ pro všechna $n > n_0$.

$\square$

Proof.

b) Mějme dvě posloupnosti $x_n \neq a$, $x_n \to a$ a $y_n \neq a$, $y_n \to a$. Pak pro posloupnost $\{z_n\} = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ platí: $z_n \neq a$ a $z_n \to a$. Jelikož $\lim f(_n)$ existuje a posloupnosti $\{f(x_n)\}$ a $\{f(y_n)\}$ jsou vybrané posloupnosti z $\{f(_n)\}$, pak $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ (dle věty o limitě vybrané posloupnosti).
Předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ pro všechna $x_n \neq a$, $x_n \to a$, kde $a, A \in \mathbb{R}$. Pro ostatní případy necháme důkaz na čtenáři. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Dokážeme sporem.
$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta) : |f(x)-A| < \varepsilon$.
Tedy nechť

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Pak $\exists\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n \in (a - \frac{1}{n}, a) \cup (a, a + \frac{1}{n}) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Tedy $x_n \neq a$, $x_n \to a$, ale $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$

Proof.

b) Mějme dvě posloupnosti $x_n \neq a$, $x_n \to a$ a $y_n \neq a$, $y_n \to a$. Pak pro posloupnost $\{z_n\} = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ platí: $z_n \neq a$ a $z_n \to a$. Jelikož $\lim f(_n)$ existuje a posloupnosti $\{f(x_n)\}$ a $\{f(y_n)\}$ jsou vybrané posloupnosti z $\{f(_n)\}$, pak $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ (dle věty o limitě vybrané posloupnosti).
Předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ pro všechna $x_n \neq a$, $x_n \to a$, kde $a, A \in \mathbb{R}$. Pro ostatní případy necháme důkaz na čtenáři. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Dokážeme sporem.
$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$
Tedy nechť

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Pak $\exists \varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n \in (a - \frac{1}{n}, a) \cup (a, a + \frac{1}{n}) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Tedy $x_n \neq a$, $x_n \to a$, ale $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Poznámka

Věty o limitách posloupností se dají převést pomocí Heineovy věty na věty o limitách funkcí.

Theorem (O aritmetice limit pro funkce)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a uvažujme funkce f a g. Pak:

i)
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

ii)
$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

iii)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

mají-li pravé strany smysl.

Proof.

i) Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$.

   a) Mějme posloupnost x_n, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak dle Heineho věty $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$.

   b) Dle věty o aritmetice limit $\lim_{n\to\infty}[f(x_n) + g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A + B$.

   c) Dle Heineho věty také $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x_n) + g(x_n)] = A + B$.

ii) Podobně jako první část.

iii) Podobně jako první část.

$\square$

Theorem (O jednoznačnosti limity funkce)

Každá funkce má v každém bodě maximálně jednu limitu.

Theorem (O dvou policajtech)

Uvažujme funkce f, k, l *a bod* $a \in \mathbb{R}^*$*. Necht' existuje okolí* $U^*_\delta(a)$ *takové, že* $\forall x \in U^*_\delta(a) : (k(x) \leq f(x) \leq l(x))$*. Pokud navíc platí rovnost* $\lim_{x \to a} k(x) = \lim_{x \to a} l(x) = A$*,*

Theorem (O jednoznačnosti limity funkce)

Každá funkce má v každém bodě maximálně jednu limitu.

Theorem (O dvou policajtech)

Uvažujme funkce f, k, l *a bod* $a \in \mathbb{R}^*$. *Nechť existuje okolí* $U^*_\delta(a)$ *takové, že* $\forall x \in U^*_\delta(a) : (k(x) \leq f(x) \leq l(x))$. *Pokud navíc platí rovnost* $\lim_{x\to a} k(x) = \lim_{x\to a} l(x) = A$, *pak* $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Theorem

Uvažujme funkce f, k *a bod* $a \in \mathbb{R}^*$. *Nechť existuje okolí* $U^*_\delta(a)$ *takové, že* $\forall x \in U^*_\delta(a) : k(x) \leq f(x)$. *Pokud navíc existují limity* $\lim_{x\to a} k(x)$ *a* $\lim_{x\to a} f(x)$, *pak* $\lim_{x\to a} k(x) \leq \lim_{x\to a} f(x)$.

Example

Heineho věta nám může pomoci i u početních příkladů. Můžeme s její pomocí ukázat, že funkce $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ nemá limitu v bodě $a = 0$. Stačí zvolit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ a $y_n = \frac{1}{\pi(1+2n)}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \cos((1+2n)\pi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Tedy limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Poznámka

Z vět o limitách plynou věty o spojitosti. Speciálně jsou-li f, g spojité, jsou spojité také $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, a to tam, kde mají smysl.

Definition

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zavedeme pojmy pravé a levé okolí bodu a následujícím způsobem:

- $U^*_{\varepsilon,-}(a) = (a - \varepsilon, a)$ ... levé okolí bodu a,
- $U^*_{\varepsilon,+}(a) = (a, a + \varepsilon)$ ... pravé okolí bodu a.

Pro $A \in \mathbb{R}^*$ řekneme, že limita funkce f v bodě a zprava je rovna A (značení $\lim_{x\to a+} f(x) = A$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U^*_{\delta,+}(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Podobně řekneme, že limita funkce f v bodě a zleva je rovna A (značení $\lim_{x\to a-} f(x) = A$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U^*_{\delta,-}(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Fuknce f je v bodě a spojitá zprava (resp. zleva) jestliže $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$).

Otázka:

Platí následující tvrzení?

a) Nechť $A, a \in \mathbb{R}$, pak
$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\lim_{x\to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = A)$

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak je-li x_1 blíže k a než x_2, je $f(x_1)$ k A blíže než $f(x_2)$.

c) Nechť $\forall x_n = 10^{-n}$ platí $f(x_n) = 0$, pak $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

d) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

   i) existuje,
   ii) neexistuje,
   iii) nemáme dost informací.

Odpověď:

a) Ano.

b) Ne. Pro $f(x) = \sin x \cdot x$ je $\lim_{n\to 0} f(x) = 0$ (věta o dvou policajtech), ale $f(\pi) = 0$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

c) Ne. Nechť $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$, pak pro všechna x_n platí $f(x_n) = 0$, ale limita $\lim_{x\to 0+} f(x)$ neexistuje.

d) iii) Pro $f(x) = g(x) = (x-a)$ je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ale pro $f(x) = (x-a)$ a $g(x) = (x-a)^2$ limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

Definition

Říkáme, že f je neklesající (nerostoucí) na množině $M \subset D_f$, jestliže $\forall x_1 < x_2 \in M\ f(x_1) \leq f(x_2)\ (f(x_1) \geq f(x_2))$. Všechny takové funkce nazýváme monotónními na M.
Říkáme, že f je klesající (rostoucí) na množině $M \subset D_f$, jestliže $\forall x_1 < x_2 \in M$ $f(x_1) > f(x_2)\ (f(x_1) < f(x_2))$. Všechny takové funkce nazýváme ryze monotónními na M.

Definition

Nechť $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.

- Supremem, maximem, infimem, minimem reálné funkce f na množině M nazýváme supremum, maximum, infimum, minimum množiny $\{f(x)\}_{x \in M}$.

Theorem

Buď f neklesající na (a,b), pak existuje $\lim_{x\to b^-} f(x)$. Je-li f shora omezená, pak $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$, není-li, je $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$

Proof.

a) f je omezená, označme $A = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $A - \varepsilon < A \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > A - \varepsilon$. Pro $x \in (x_0, b)$ platí $A - \varepsilon < f(x) \le A < A + \varepsilon$.

b) f není omezená. Zvolme K, pak $\exists x_0 :\ K < f(x_0)$, tedy $\forall x \in (x_0, b) : K < f(x_0) \le f(x) \Rightarrow \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$.

□