NMTM101 - matematická analýza I.

November 6, 2020

Theorem (O limitě složené funkce)

Necht' $\lim_{x\to a} f(x) = A$*,* $a, A \in \mathbb{R}^*$*, a necht' existuje okolí* $U_\varepsilon^*(a)$ *takové, že* $\forall x \in U_\varepsilon^*(a)$ *je* $f(x) \neq A$*. Necht'* $\lim_{y\to A} g(y) = B$*, pak*

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = B.$$

Proof.

Užijeme Heineho větu. Zvolme posloupnost $x_n \to a, x_n \neq a$, pak $f(x_n) \to A$. Jelikož $f(x_n) \to A$ a $f(x_n) \neq A$ pro $n > n_0$ (pro $x_n \in U_\varepsilon(a)^*$), pak $g(f(x_n)) \to B$ (opět dle Heineho věty). Jelikož pro libovolnou posloupnost $x_n \to a$, $x_n \neq a$, platí, že $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = B$, pak dle Heineho věty

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = B.$$

□

Důsledek

Když je fce g spojitá, lze předpoklad $f(x_n) \neq A$ vynechat.

Důsledek

Je-li funkce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$, pak je funkce $g \circ f(x)$ spojitá v bodě a.

Poznámka

Předpoklad $f(x_n) \neq A$ je splněn vždy, je-li funkce f ryze monotónní. Stejné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Example

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

Jelikož e^x je spojitá funkce,

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2-3}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x-2}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}} \Rightarrow \text{nemá limitu (pravá limita se nerovná levé).}$$

Example

Spočtěme $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}$.
Pro $y = \sqrt[12]{1+x}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[6]{1+x}} = \lim_{y\to 1} \frac{y^6-y^4}{y^3-y^2} = \lim_{y\to 1} \frac{y^4(y^2-1)}{y^2(y-1)} = \lim_{y\to 1} y^2(y+1) = 2.$$

Zde je třeba si uvědomit, že používáme větu o limitě složené funkce, kde $f(x) = \sqrt[12]{1+x}$ a $g(y) = \frac{y^6-y^4}{y^3-y^2}$.

Poznámka

Je dobré si uvědomit, že věta o limitě složené funkce se dá používat i při počítání limit posloupností. Zde striktně vzato kombinujeme větu o limitě složené funkce a Heineho větu. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Nejdříve určíme limitu $\lim_{x\to\infty} \sin(\ln(x+1) - \ln(x))$. Začneme s limitou vnitřní funkce, tedy $\lim_{x\to\infty}(\ln(x+1) - \ln(x)) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x}$. Jelikož $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ a fuknce $ln(x)$ je spojitá v bodě $a = 1$, pak dle věty o limitě složené funkce $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x} = \lim_{y\to 1}\ln(y) = 0$. Podobně se spojitosti funkce $\sin(x)$ v nule dostaneme $\lim_{n\to\infty} \sin(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{y\to 0}\sin(y) = 0$. Jelikož $\lim_{x\to\infty} \sin(\ln(x+1) - \ln(x)) = 0$, pak z Heineho věty přímo dostaneme $\lim_{n\to\infty} \sin(\ln(n+1) - \ln(n)) = 0$.

Otázka:

Platí následující tvrzení?

a) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

c) Nechť je funkce f spojitá v bodě a a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

d) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a, pak je funkce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

e) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a a funkce f je spojitá v bodě a, pak je funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

Odpověď:

a) Neplatí. Uvažujem funkci f takovou, že $f(a) = B \neq A$ a posloupnost $x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$.

b) Ano. Je-li $x_n < x_{n+1}$ a zároveň $x_n \to a$, tak $x_n < a$. Tedy pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : x_n \in (a-\delta, a)$. Jelikož $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cap (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$, tak $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

c) Ano. K důkazu tohoto tvrzení stačí aplikovat důsledek věty limitě složené funkce a Heineho větu.

d) Neplatí. Je-li například $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $f(a) = B \neq A$, g je spojitá v bodě A a $g(B) = g(A)$, pak je $g \circ f$ spojitá v bodě a.

e) Neplatí. Je-li například f konstantní funkce ($f(x) = A$) a g je definovaná v bodě A, pak $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(A)$. Ale g nemusí být vůbec definovaná na prstencovém okolí bodu A, pokud na něm je definovaná, tak nemusí mít v bodě A limitu a v případě, ze má funkce g v bodě A limitu, tak pořád nemusí platit rovnost $g(A) = \lim_{y\to A} g(y)$.

Definition

Funkce f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$, jestliže platí:

I. f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

II. f je spojitá zprava v bodě a,

III. f je spojitá zleva v bodě b.

Neobsahuje-li interval I krajní body a, resp. b, pak z definice vynecháme body II., resp. III.

Theorem

Nechť je $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Proof.

Nechť $f(a) < f(b)$ a nechť $c \in (f(a), f(b))$. Označme $M = \{x \in (a, b) : f(x) < c\}$, pak $M \neq \emptyset$ a je omezená. Označme $x_0 = \sup M$, pak existuje posloupnost $\{x_n\} \in M$, $x_n \to x_0$, a tedy $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Jelikož $f(x_n) < c \; \forall n \in \mathbb{N}$, pak $f(x_0) \leq c$. Nechť je $f(x_0) < c$, pak existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že $f(x) < f(x_0) + \frac{c - f(x_0)}{2} < c$ pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$ (spojitost v bodě x_0 a volba $\varepsilon = \frac{c - f(x_0)}{2}$). Tedy $U_\delta(x_0) \in M$, což je ve sporu, neboť $x_0 = \sup M$. Obdobně pro $f(b) < f(a)$. (Případ $f(a) = f(b)$ je triviální.) $\square$

Otázka:

Je následující tvrzení pravdivé? Polynom $f(x) = x^{100} - 9x^2 + 1$ má v intervalu $[0, 2]$ alespoň jeden kořen.
Otázka je převzata ze stránky:
http://pi.math.cornell.edu/∼GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

Tvrzení je pravdivé. Stačí si uvědomit, že polynom je spojitá funkce, $f(0) = 1$ a $f(1) = -7$. Tedy dle předchozí věty musí existovat $x \in (0, 1)$ takové, že $f(x) = 0$.

Theorem

Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu I s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom f zobrazuje interval I na interval J s koncovými body $A = \inf_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, $B = \sup_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$. Tyto koncové body patří do intervalu J právě tehdy, když patří do intervalu I příslušné koncové body a, b.

Proof.

Ukážeme si, že $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$. Označme $g = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $x_\varepsilon \in (a,b)$ tak, že $g \leq f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$, tedy pro $x \in (a, x_\varepsilon)$ platí $g \leq f(x) < f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$ $(\delta = x_\varepsilon - a)$. Podobně pro $\inf_{x\in(a,b)} f(x) = -\infty$.

Necht' $I = (a,b)$, označme $A = \inf_{x\in I} f(x)$ a $B = \sup_{x\in I} f(x)$. Je-li $c \in (A,B)$, pak existuje $x_1, x_2 \in I$ tak, že $A \leq f(x_1) < c < f(x_2) \leq B$ (z definice suprema a infima). Dle věty (O nabyvani vsech mezihodnot) pak existuje x_c tak, že $f(x_c) = c$, tedy $(A,B) \subset f(I)$. Je-li $c \in f(I)$, pak existuje $x_c \in I = (a,b)$ tak, že $f(x_c) = c$, tedy $\exists x_1, x_2 \in I$, pro které platí $x_1 < x_c < x_2$, tedy $A \leq f(x_1) < f(x_c) = c < f(x_2) \leq B$, proto $f(I) \subset (A,B)$. Pro $I = [a,b)$ platí $f(a) \leq f(x)\ \forall x \in I$, tedy $f(a) = \inf_{x\in I} f(x) = A$, obdobně pro supremum. $\square$

Theorem

Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu $I = (a, b)$, pak:

i) *f^{-1} je spojitá a rostoucí na intervalu $f(I)$.*

ii) *$\lim_{y\to A^+} f^{-1}(y) = a$, kde $A = \inf_{x\in I} f(x)$.*

Proof.

i)
- (f^{-1} je rostoucí): (Sporem) Nechť existují $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, pro něž platí $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Pak $f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq y_2 = f(f^{-1}(y_2))$, což je ve sporu s předpokladem, tedy f^{-1} je rostoucí.
- (f^{-1} je spojitá): Nechť $y_0 \in f(I)$ není pravým krajním bodem intervalu $f(I)$, pak $x_0 = f^{-1}(y_0)$ není pravým krajním bodem intervalu I.
  Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $x_0 + \varepsilon \in I$. Nechť $\delta = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$, pak $f^{-1}(y_0 + \delta) = f^{-1}(f(x_0) + f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)) = f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon$.
  Jelikož je f^{-1} rostoucí funkce, pak $\forall y \in (y_0, y_0 + \delta)$ platí $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0) + \varepsilon)$, tedy $\lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Obdobně dokážeme spojitost zleva a z toho dostaneme spojitost funkce f^{-1}.

ii) Viz i) a předchozí věta aplikovaná na funkci f^{-1}.

$\square$

Theorem

Existuje právě jedna dvojice funkcí $(\sin x, \cos x)$ *taková, že*

a) *funkce jsou definovány na* $\mathbb{R}$,

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$\sin x$ *je lichá a* $\cos x$ *je sudá.*

c) *Existuje číslo* $\pi > 0$ *tak, že* $\sin x$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}], \sin \pi/2 = 1, \sin 0 = 0$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Theorem

Existuje právě jedna funkce (e^x), *která má následující vlastnosti:*

a) *Je definovaná a je rostoucí na* $\mathbb{R}$,

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *je* $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^0 = 1$,

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Example

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow$ substituce $y = e^x - 1$, pak $x = \ln(y+1)$, tedy $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$.

Example

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2(\cos x + 1)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Example

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^3x-3\mathrm{tg}x}{\cos(x+\pi/6)}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^2x-3}{\cos(x+\pi/6)}\cdot\mathrm{tg}x=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^2x-3}{\cos(x+\pi/6)}\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\mathrm{tg}x-\sqrt{3})(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})}{\cos(x+\pi/6)}$$

$$=6\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\mathrm{tg}x-\sqrt{3})}{\cos(x+\pi/6)}$$

$$=6\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{3})}{\cos(\pi/6)\cos x-\sin(\pi/6)\sin x}$$

$$=6\lim_{x\to\pi/3}\frac{\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}$$

$$=6\lim_{x\to\pi/3}\frac{-2}{\cos x}=-24.$$

Definition

Budeme psát $f = o(g)$ v $a \in \mathbb{R}^*$, je-li $\lim_{x \to a}(\frac{f}{g})(x) = 0$, a $f = O(g)$ v $a \in \mathbb{R}^*$, je-li $(\frac{f}{g})$ omezená na nějakém $U^*(a)$.

Example

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x+3)^5}{(x^5-x^3+7x-9)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}+o(x^{10})}{x^{10}+o(x^{10})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}(1+o(x^{10})/x^{10})}{x^{10}(1+o(x^{10})/x^{10})} = 1.$$