NMTM101 - matematická analýza I.

December 8, 2020

Nekonečné číselné řady

Definition

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazveme n-tý částečný součet řady a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů.
Existuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s.
Neexistuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Divergentní řady dále dělíme na tři případy:

- Je-li $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, řekneme, že řada diverguje k $+\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,
- je-li $lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada diverguje k $-\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$,
- jestliže $lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada osciluje.

geometrická řada

Určete, kdy konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a zjistěte její součet.

geometrická řada

Určete, kdy konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a zjistěte její součet.
řešení:

- Nechť $q = 1$, pak $s_n = na$ a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ pro $a > 0$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ pro $a < 0$. řada je tedy divergentní a diverguje k $+\infty(-\infty)$ pro $a > 0(a < 0)$.
- Nechť $q = -1$, pak $s_n = 0$ pro n sudé a $s_n = a$ pro n liché, tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. řada osciluje (diverguje).

geometrická řada

- Nechť $|q| \neq 1$.

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \\ s_n q &= aq + aq^2 + \ldots + aq^n \\ s_n - s_n q = s_n(1-q) &= a - aq^n = a(1-q^n) \\ s_n &= a\frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

  - Pro $|q| < 1$ je
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$
řada konverguje a má součet $\frac{a}{1-q}$.
  - Pro $q > 1$ je
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} = \pm\infty,$$
řada diverguje k $\pm\infty$.
  - Pro $q < -1$ limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řada tedy osciluje (diverguje).

teleskopiská řada

Určete, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.
\end{aligned}$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ tedy konverguje, navíc jsme rovněž určili její součet, který je 1.

Theorem (nutná podmínka konvergence)

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Proof.

Nechť $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jelikož $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ a $\forall n > n_0 : (s_n \in (S - \frac{\varepsilon}{2}, S + \frac{\varepsilon}{2}) \wedge s_{n+1} \in (S - \frac{\varepsilon}{2}, S + \frac{\varepsilon}{2}))$, pak $\forall n > n_0 : |a_{n+1}| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\square$

Poznámka

Obrácená implikace neplatí (viz následující příklad).

harmonická řada

Vyšetřete konvergenci harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. řešení:

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{i} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \\
&\geq \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{i} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \geq \sum_{n=1}^{n-2} \frac{1}{i} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq \dots \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Posloupnost částečných součtů této řady je rostoucí, jelikož $a_n = \frac{1}{n} > 0$, tedy limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje. Jelikož je $s_{2^n} \geq \frac{n+1}{2} \to \infty$, je tato limita $+\infty$. Tedy harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Theorem

Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \gamma b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \gamma b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Proof.

Důsledek věty o aritmetice limit.

□

Definition

řada se nazývá omezená, je-li posloupnost $\{s_n\}$ omezená.

Theorem

Konvergentní řada je omezená.

Proof.

Viz věta má-li posloupnost vlastní limitu, pak je omezená. $\square$

Poznámka

Obrácené tvrzení neplatí. Např. řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ je divergentní (osciluje), ale je omezená.

Theorem

Nechť $p \in \mathbb{N}$, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují.

Proof.

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=p+1}^{n} a_i$, pak $s_n = \sum_{i=1}^{p} a_i + \hat{s}_n$. Jelikož $\sum_{i=1}^{p} a_i \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \pm \infty$.

□

Poznámka

Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci, řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.

Otázka:

a) Jsou-li konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je konvergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + \dots$?

b) Jsou-li divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je divergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + \dots$?

c) Je-li konvergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + \dots$, jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

d) Je-li divergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + \dots$, jsou divergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Odpověď:

a) Ano.

b) Ne. Například řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ jsou divergentní, ale řada $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ konverguje k nule.

c) Ne. Viz příklad v části b).

d) Ne. Jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ může být konvergentní.

řady s nezápornými členy

Definition

Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.

Theorem

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.

- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neomezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Proof.

Přímý důsledek věty "neklesající posloupnost $\{s_n\}$ má limitu, která je vlastní (rovna $\sup\{s_n\}$), je-li tato posloupnost omezená a je rovna $+\infty$, je-li posloupnost $\{s_n\}$ neomezená".

$\square$

Theorem (srovnávací kritérium)

Nechť $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, *pak platí:*

- *Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_i$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- *Jestliže diverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *pak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proof.

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, pak $s_n \leq \hat{s}_n$. Jelikož jsou posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{\hat{s}_n\}$ neklesající, pak mají limitu. Navíc platí $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n$, viz věta o nerovnostech pro posloupnosti.

$\square$

Poznámka

Předpoklad $a_n \leq b_n$ nemusí platit pro všechna n, ale stačí, aby platil $\forall n > n_0$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.

Example

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
řešení: Jelikož $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ pro všechna $n \geq 2$, a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (viz věta 6), pak se stačí zaměřit na konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje (viz příklad 5), a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Theorem (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a_n \geq 0$ *a* $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, *pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.*

Proof.

Označme $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0, \infty)$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{A}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A$, $\forall n > n_0$. Tedy $\frac{A}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq 2A \cdot a_n$ $\forall n > n_0$ a dál využijeme srovnávací kritérium a aritmetiku limit.

$\square$

Example

Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n}$.

řešení:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+3n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 3 \in (0,\infty)$. Jelikož harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz příklad 7), pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0,\infty)$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz příklad 10), pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}} = \pi \in (0,\infty)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n}$ diverguje.

Theorem (Odmocninové kritérium - Cauchyho)

Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

a) i) *Jestliže existuje* $q < 1$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*
   ii) *Je-li* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho členů posloupnosti* $\{a_n\}$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

b) *Existuje-li limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, *pak:*
   i) *Je-li* $q < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*
   ii) *Je-li* $q > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Proof.

a) i) Je-li $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak $a_n \leq q^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jelikož geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (viz příklad 3), pak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle srovnávacího kritéria.

ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, pak $\lim_{n\to} a_n \neq 0$ a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, jelikož není splněna nutná podmínka konvergence.

b) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

i) Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dále postupujeme stejně jako v části a) i).

ii) Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 1$ $\forall n > n_0$. Dále viz a) ii).

$\square$

Example

Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

proto řada konverguje.

Example

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$\overset{L'H}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-1/n^2}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}} = e^{\frac{-2}{\pi}} < 1,$$

tedy řada konverguje.

Poznámka: Předchozí limitu jsme řešili pomocí l'Hospitalova pravidla, které bude uvedeno až později.

Example

b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$\overset{L'H}{=}e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-1/n^2}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}}=e^{\frac{-2}{\pi}}<1,$$

tedy řada konverguje.
Poznámka: Předchozí limitu jsme řešili pomocí l'Hospitalova pravidla, které bude uvedeno až později. Ukážeme si tedy i postup, jak tuto limitu určit bez použití tohoto pravidla.

Example

Určeme si nejdříve limitu:

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{x} - 1} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{x} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0+} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\arccos(y) - 1\right)}{y}$$

$$\overset{y=\cos z}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{2}{\pi}\arccos(\cos z) - 1}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{2}{\pi}z - 1}{\cos z}$$

$$\overset{u=z-\frac{\pi}{2}}{=} \lim_{u\to 0-} \frac{\frac{2}{\pi}(u + \frac{\pi}{2}) - 1}{\cos(u + \frac{\pi}{2})} = \lim_{u\to 0-} \frac{\frac{2}{\pi}u}{\cos u \cos\frac{\pi}{2} - \sin u \sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0-} \frac{\frac{2}{\pi}u}{-\sin u} = -\frac{2}{\pi}.$$

Nyní stačí využít spojitost funkce e^x a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)} = \lim_{v\to-\frac{2}{\pi}} e^v = e^{\frac{-2}{\pi}}.$$

Theorem (Podílové kritérium - d'Alembertovo)

Nechť $a_n \geq 0$.

i) *Existuje-li* $q < 1$ *takové, že* $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Platí-li pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

ii) *Existuje-li limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *pak:*

- *je-li* $q < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*
- *je-li* $q > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Proof.

i) Jelikož $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, pak $a_{n+1} \leq a_n q$, tedy indukcí dokážeme, že $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ je konvergentní geometrická řada ($|q| < 1$), pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje dle srovnávacího kritéria. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak $a_{n+1} \geq a_1$ a jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ diverguje[a], pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii)
- Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$ pro všechna $n > n_0$. Označme $\hat{q} = q + \varepsilon$ a postupujme dále jako v první části důkazu, tedy dostaneme $a_{n+1} \leq a_n \hat{q}$ pro všechna $n > n_0$, a proto $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} \hat{q}^k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Jelikož je $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n} \hat{q}^n$ konvergentní geometrická řada, pak je i $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergentní dle srovnávacího kritéria, a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pro všechna $n > n_0$, tedy $a_{n_0+k} > a_{n_0} \ \forall n > n_0$. Dále postupujeme jako v předchozích částech důkazu.

$\square$

[a] $a_1 > 0$, jelikož výraz $\frac{a_2}{a_1}$ má smysl z předpokladu věty, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Example

Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-7)2^n}{n!}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n-5)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2n-7)2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-5)2}{(2n-7)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-10}{2n^2-7n} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

tedy řada diverguje.

Poznámka

V situaci, kdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, kritérium "mlčí". Tato situace může nastat jak pro konvergentní řadu (viz příklad $\sum \frac{1}{n^2}$, tak pro divergentní řadu (viz příklad $\sum \frac{1}{n}$). Je dobré si uvědomit, že podílové kritérium nám obecně nedá informaci o konvergenci či divergenci řady $\sum \frac{1}{n^k}$, přitom lze ukázat, že tato řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$. Proto byla vynalezena další silnější kritéria jako třeba Raabeovo či integrální kritérium. Uvedeme si zde Raabeovo kritérium (i když bez důkazu, který na nás čeká až v třetím semestru) a ukážeme si jeho aplikaci na řadu $\sum \frac{1}{n^k}$.

Theorem (Raabeovo kritérium)

Nechť $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) *Je-li* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

ii) *Je-li* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*