NMTM101 - matematická analýza I.

December 15, 2020

Poznámka

V situaci, kdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, kritérium "mlčí". Tato situace může nastat jak pro konvergentní řadu (viz příklad $\sum \frac{1}{n^2}$, tak pro divergentní řadu (viz příklad $\sum \frac{1}{n}$). Je dobré si uvědomit, že podílové kritérium nám obecně nedá informaci o konvergenci či divergenci řady $\sum \frac{1}{n^k}$, přitom lze ukázat, že tato řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$. Proto byla vynalezena další silnější kritéria jako třeba Raabeovo či integrální kritérium. Uvedeme si zde Raabeovo kritérium (i když bez důkazu, který na nás čeká až v třetím semestru) a ukážeme si jeho aplikaci na řadu $\sum \frac{1}{n^k}$.

Theorem (Raabeovo kritérium)

Nechť $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

i) *Je-li* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

ii) *Je-li* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Example

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n^k}$ pro $k \in (1,2)$. Připomeňme, že pro $k=1$ řada diverguje, a tedy diverguje i pro $k<1$ dle srovnávacího kritéria. Obdobně dostaneme konvergenci pro $k>2$ užitím stejné věty a znalosti konvergence řady $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{(n+1)^k}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^k-n^k}{n^k}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{e^{k\ln(n+1)}-e^{k\ln n}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{e^{k\ln n}(e^{k\ln(n+1)-k\ln n}-1)}{n^k}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^k\cdot(e^{k\ln(n+1)-k\ln n}-1)(k\ln(n+1)-k\ln n)}{n^k\cdot(k\ln(n+1)-k\ln n)}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot 1\cdot\frac{(k\ln(n+1)-k\ln n)}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{k\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = k\cdot 1 = k.
\end{aligned}$$

Tedy řada $\sum \frac{1}{n^k}$ konverguje pro $k>1$ dle Raabeova kritéria.

Otázka:

a) Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n \geq a_{n+1}$

b) Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

c) Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

d) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
   - i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.
   - ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.
   - iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.
   - iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

e) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
   - i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.
   - ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.
   - iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.
   - iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

f) Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

g) Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak konverguje i řada $\sum (-1)^n a_n$.

Odpověď:

a) Tvrzení neplatí. Například pro posloupnost $a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}$ a $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^3}$ řada $\sum a_n$ konverguje ($a_n \leq \frac{1}{n^2}$), ale $a_{2n-1} < a_{2n}$.

b) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

c) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

d) Platí tvrzení ii) a iii). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n < b_n$. Dále stačí aplikovat srovnávací kritérium.

e) Platí tvrzení i) a iv). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n > b_n$. Dále stačí aplikovat srovnávací kritérium.

f) Tvrzení platí. Tomuto kritériu se říká kondenzační kritérium.

g) Tvrzení platí.

řady s obecnými členy

Definition

řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně.

Theorem

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Proof.

Použijme značení $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ a $\sum_{k=1}^\infty |a_k| = K \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| = \sum_{n=1}^\infty a_n^+ + \sum_{n=1}^\infty a_n^-,$$
$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n^+ - \sum_{n=1}^\infty a_n^-.$$

Posloupnosti částečných součtů $s_n^+ = \sum_{k=1}^n a_k^+$ a $s_n^- = \sum_{k=1}^n a_k^-$ jsou monotónní a omezené ($s_n^+ \le \sum_{k=1}^n |a_k| = K$ a $s_n^- \le \sum_{k=1}^n |a_k| = K$), tedy dle věty o limitě monotonní posloupnosti konvergují. Z konvergence řad $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ a $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$ a věty o aritmetice limit dostaneme konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

$\square$

Example

Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

řešení:

a) Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right|$ konverguje (příklad **??**), pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (dle věty 4), a tedy řada konverguje absolutně.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je harmonická řada, o které víme, že je divergentní. Musíme tedy zkoumat konvergenci přímo řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$s_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} < \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní, a tedy je limita $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ konečná, a proto je konečná i limita $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Označme $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = A$, a tedy je $\lim_{n\to\infty} s_n = A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje relativně.

Theorem (Leibnitzovo kritérium)

Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.

Proof.

$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, tedy je posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající. Jelikož

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned}$$

je navíc posloupnopst $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, a tedy konvergentní. Označme $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A,$$

tedy je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. $\square$

Example

Vrat'me se k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Využijeme-li Leibnitzovo kritérium, pak

I. $\frac{1}{n} > 0$,
II. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$,
III. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje.

Example

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$. řadu sice lze napsat ve tvaru $\sum(-1)^n a_n$, kde $a_n > 0$, ale neplatí obecně nerovnost $a_n \geq a_{n+1}$, a tedy nelze aplikovat Leibnizovo kritérium.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \dots$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= -\frac{1}{\sqrt{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2n}-1} \\ &= \frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{1}+1}{(\sqrt{1}+1)(\sqrt{2}-1)} + \dots \frac{-\sqrt{2n}+1+\sqrt{2n-1}+1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2+\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k-1}+1)(\sqrt{2k}-1)}. \end{aligned}$$

Example

Jelikož $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}) = 0$, pak $\forall n > n_0$ platí nerovnost:
$\frac{1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)} < \frac{2+\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)}$.
řadu $\sum \frac{1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)}$ srovnáme (použijeme limitní srovnávací kritérium) s harmonickou řadou. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \infty$.
Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \infty$, proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ diverguje.