NMTM101 - matematická analýza I.

December 17, 2020

Přerovnávání řad

Definition

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ ($\{k_n\}$ je posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou). Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Theorem

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním této řady, a jejich součet je stejný (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$).

Lemma

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.

Theorem (Riemannova)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$, a takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ osciluje.

Posloupnosti podruhé

Theorem

Z každé neomezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má nevlastní limitu.

Proof.

Nechť $\{a_n\}$ není omezená shora. Ukážeme, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel k_n takových, že $a_{k_n} > n$. Jelikož $\{a_n\}$ není omezená shora, pak existuje $a_{k_1} > 1$. Nechť $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ taková, že $a_{k_i} > i \ \forall i = 1, \dots, n$, pak existuje $k_{n+1} > k_n$ takové, že $a_{k_{n+1}} > n + 1$. Skutečně, nechť takové k_{n+1} neexistuje, pak je ale posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora např. číslem $\max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_n}, n + 1\}$, což je ve sporu s předpokladem neomezenosti, proto lze takové k_{n+1} najít. Jelikož $a_{k_n} > n \ \forall n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. Obdobně pro $\{a_n\}$ omezenou zdola.

$\square$

Theorem (Bolzano-Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost.

Proof.

Existují $A, B \in \mathbb{R}$ takové, že $A < a_n < B \ \forall n \in \mathbb{N}$ (z omezenosti posl $\{a_n\}$). Označme $A_1 = A$, $B_1 = B$ a $k_1 = 1$. Jelikož v intervalu $[A_1, B_1]$ leží nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{a_n\}$, pak alespoň v jednom z intervalů $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}], [\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ musí ležet nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{a_n\}$. Označme tento interval $[A_2, B_2]$ a necht' $k_2 = \min\{n > k_1 : a_n \in [A_2, B_2]\}$ (existence minima plyne z toho, že v $[A_2, B_2]$ je nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$). Obdobně označíme $[A_3, B_3]$ ten z intervalů $[A_2, \frac{A_2+B_2}{2}], [\frac{A_2+B_2}{2}, B_2]$, ve kterém leží nekonečně prvků posloupnosti (v případě, že v obou intervalech leží nekonečně prvků posloupnosti, pak si můžeme vybrat, jaký z těchto intervalů označíme $[A_3, B_3]$). Označíme $k_3 = \min\{n > k_2 : a_n \in [A_3, B_3]\}$ a pokračujeme stále stejným způsobem dále. □

Proof.

Takto sestrojíme posloupnost intervalů $\{[A_n, B_n]\}$ a vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}$, pro něž platí:

- $[A_{n+1}, B_{n+1}] \subset [A_n, B_n], \ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^{n-1}}$,
- $a_{k_n} \in [A_n, B_n]$.

Jelikož $\{A_n\}$ a $\{B_n\}$ jsou monotónní a omezené posloupnosti, pak jsou konvergentní. A jelikož $\lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{B-A}{2^{n-1}} = 0$, tedy $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n$, pak dle věty o dvou policajtech je

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

$\square$

Definition

Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (BC podmínku), jestliže $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Theorem (Bolzanova-Cauchyova)

Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku.

Proof.

- Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n > n_0$. Tedy $|a_n - a_m| = |a_n - A - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon$ pro všechna $m, n > n_0$.
- Nechť $\{a_n\}$ splňuje BC podmínku.
  1) Ukažme si, že $\{a_n\}$ je omezená. Pro $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < 1\ \forall n, m > n_0$, tedy $a_{n_0+1} - 1 < a_m < a_{n_0+1} + 1\ \forall m \geq n_0$. Pak tedy $a_n \leq \max\{a_1, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$ a $a_n \geq \min\{a_1, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
  2) Jelikož je $\{a_n\}$ omezená, pak dle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$, označme $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$.
  3) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $|a_{k_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > n_0^1$ ($\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$) a $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n, m > n_0^2$ (BC podmínka). Zvolme $m > n_0^1$ takové, že $k_m > n_0^2$, pak $|a_n - A| = |a_n - a_{k_m} + a_{k_m} - A| \leq |a_n - a_{k_m}| + |a_{k_m} - A| < \varepsilon$ pro $n > n_0^2$.

$\square$

l'Hospitalovo pravidlo

Theorem (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť pro $a \in \mathbb{R}^*$ mají funkce f a g vlastní derivace na nějakém $U^*(a)$, $g'(x) \neq 0$ na $U^*(a)$ a nechť je splněna jedna z následujících podmínek:

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $g(x) \neq 0$ *na* $U^*(a)$,

b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Je-li navíc $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *pak* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Proof.

a) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Nechť jsou splněny předpoklady s pravou limitou a pravým okolím. Definujme $\hat{f} = f, \hat{g} = g$ na $U^*(a)^+$ a $\hat{f}(a) = \hat{g}(a) = 0$. Nechť $x \in U^*(a)^+$, pak $\hat{f}, \hat{g}$ splňují předpoklady Cauchyovy věty o střední hodnotě na $[a, x]$ (jsou spojité na $[a, x]$, mají derivace na (a, x) a $\hat{g}'$ je vlastní a nenulová na (a, x)). Tedy existuje $\xi(x) \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(a)} = \frac{\hat{f}'(\xi(x))}{\hat{g}'(\xi(x))} = \frac{f'}{g'}(\xi(x)).$$

Jelikož $\lim_{x \to a} \xi(x) = a$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(\xi(x)) = A.$$

Stejně i pro $U^*(a)^-$ a $U^*(a)$.

Proof.

Nechť $a = \infty$, pak označme $y = \frac{1}{x}$ a definujme $F(y) = f(\frac{1}{y})$ a $G(y) = g(\frac{1}{y})$. Pak F a G splňují předpoklad a) pro $a = 0$, jelikož $F'(y) = f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})$ a

$$\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)},$$

je důkaz hotov.

$\square$

Example

Pomocí l'Hospitalova pravidla se dá ukázat platnost základních limit:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$,

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

Example

Pomocí l'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat i složitější limity:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.