Kapitola 1

Diferenciální rovnice

Definice 1.1 *Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Není-li F konstantní funkce vzhledem k poslední proměnné, mluvíme o diferenciální rovnici n-tého řádu.

Definice 1.2 *Řešením rovnice 1.1 rozumíme reálnou funkci $y(x)$ definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která ma v I vlastní n-tou derivaci a pro každé $x \in I$ platí:*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Řešení y rovnice 1.1 nazveme maximální, jestliže neexistuje řešení této rovnice z takové, že $D_y \subsetneq D_z$ a $y(x) = z(x)$ na D_y.

Příklad 1.1 *Rovnice $y' - y = 0$ má řešení $y(t) = e^t$ na $\mathbb{R}$ (toto řešení je maximální).*

Definice 1.3 *Říkáme, že řešení $y(x)$ rovnice 1.1 splňuje počáteční podmínky $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ v bodě t_0, jestliže $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, $x_0, y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$.*

Úloha nalézt řešení $y(x)$ diferenciální rovnice 1.2, které splňuje počáteční podmínku $y^{(k)}(x_0) = y_k$ pro $x_0 \in I$ a $k = 0, 1, ..., n-1$ se nazývá Cauchyova úloha.

1.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Dále se budeme zabývat rovnicemi ve tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných, definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^2$.

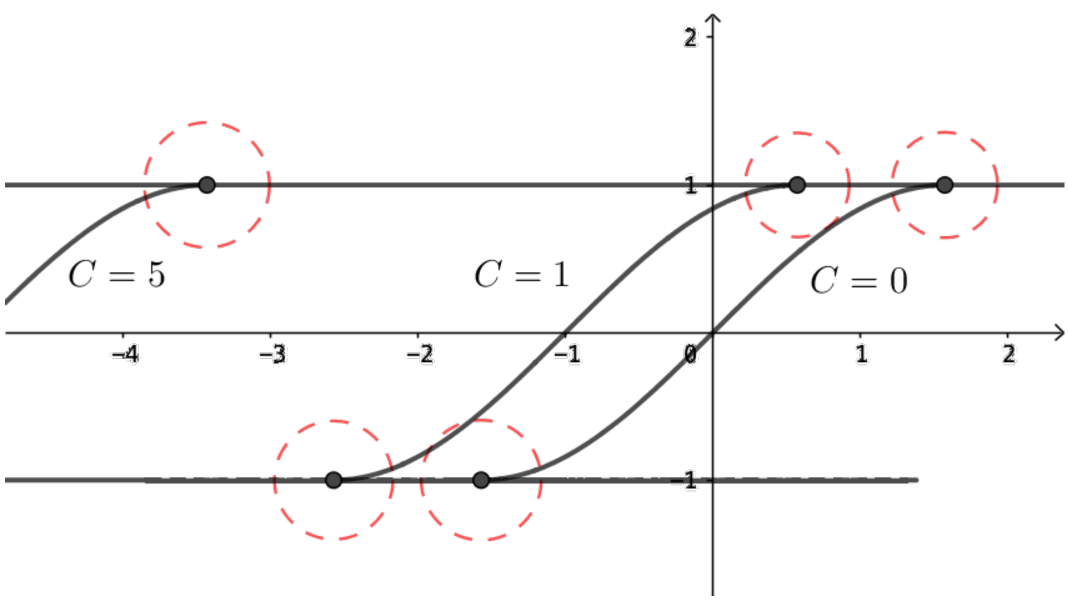
Uvedeme si následující větu bez důkazu.

Věta 1.1 *(Peanove - existenční) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$ a $(x_0, y_0) \in M$ je libovolný bod. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice 1.2 procházející tímto bodem. Tj. existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $y'(x) = f(x, y(x))$ a navíc platí: $y^{(k)}(x_0) = y_k$ pro $k = 0, 1$.*

Příklad 1.2 *Uvažujme rovnici $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Tato rovnice má řešení $y(x) \equiv \pm 1$ na $\mathbb{R}$ i*

$$y_c = \begin{cases} -1, & x < -C - \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x + C), & -C - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -C + \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > -C + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

kde C je libovolná reálná konstanta.



Na obrázku jsou znázorněna jak konstantní řešení $y = \pm 1$, tak nekonstantní řešení s volbou konstant $C = 0,1$ a $C = 5$. Jak je z obrázku patrné, v červeně vyznačených bodech se konstantní a nekonstantní řešení rozpojují (je zde nejednoznačnost řešení). Otázkou je, zda existují podmínky na rovnici 1.2, které zaručují, že takové chování nenastane.

Věta 1.2 *(Picardova - o jednoznačnosti řešení) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$, která navíc splňuje lokální Lipschitzovu podmínku v proměnné y, tj: Ke každému bodu $(x_0, y_0) \in M$ existuje okolí $U(x_0, y_0)$ tohoto bodu a číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ pro každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in U$. Potom existuje právě jedno maxímální řešení rovnice 1.2 procházející bodem (x_0, y_0).*

1.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nazveme rovnicí se separovanými proměnnými, pokud má tvar

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.3}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Je-li $g \neq 0$, tak z rovnice 1.3 dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zintegrováním této rovnice dostaneme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Je-li $G(y)$ primitivní dunkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, tak dostaneme rovnici

$$G(y) = F(x) + c,$$

tedy

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

Poznámka 1.1 *Je důležité nezapomenout na integrační konstantu c, ta nám umožňuje najít řešení, které splňuje konkrétní počáteční podmínku.*

Příklad 1.3 *Najděte řešení rovnice* $y' = \sqrt{|y|}$.

Řešení: Pro $y \neq 0$ *dostaneme*

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \\ \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= 1 \\ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= \int 1 dx \\ 2\ \mathrm{sgn}(y)\sqrt{|y|} &= x + c. \end{aligned}$$

Jelikož $\sqrt{|y|} > 0$, *tak* y *a* $x + c$ *má stejné znaménko, tedy pro* $x > -c$ *dostaneme*

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= \frac{x+c}{2} \\ y &= \frac{(x+c)^2}{4}, \quad x > -c. \end{aligned}$$

Stejně dostaneme

$$y = -\frac{(x+c)^2}{4}, \quad x < -c.$$

Pro $y = 0$ *dostaneme konstantní řešení* $y(x) = 0$.

Příklad 1.4 *Najděte řešení rovnice* $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Řešení:

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x} \tag{1.5}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x} dx \tag{1.6}$$

$$\arcsin y = \ln|x| + c. \tag{1.7}$$

Zde je třeba si uvědomit, že obor hodnot funkce arcsin *je* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *tedy rovnost* $\arcsin y = \ln|x| + c$ *platí pro takové* x *a* c, *pro které je* $\ln|x| + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Dále tedy dostaneme* $y = \sin(\ln|x| + c)$, *pro* $x \in (e^{\frac{-\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c})$. *Zkusme třeba pro volbu* $c = 0$ *a* $x \in (e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\pi})$ *zjistit, zda je funkce* $y = \sin(\ln|x| + c) = \sin(\ln|x|)$ *řešením naší rovnice. Pak dostaneme, že*

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

a
$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(\ln x)}}{x} = \frac{\sqrt{\cos(\ln x)}}{x} = \frac{-\cos(\ln x)}{x}.$$

Tedy pro takové c a t je $y(x)$ řešením rovnice $y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Příklad 1.5 *Řešte Cauchyho úlohu $y \ = -2xy$, $y(0) = 2$.*

Řešení:

$$\begin{aligned}
y' &= -2xy\\
\frac{dy}{y} &= -2xdx\\
\int \frac{dy}{y} &= -\int 2xdx\\
\ln|y| &= -x^2 + c\\
|y| &= e^c \cdot e^{-x^2}\\
y &= \pm e^c \cdot e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Jelikož je řešením i $y \equiv 0$, tak můžeme obecné řešení napsat ve tvaru $y = ce^{-x^2}$, kde $c \in \mathbb{R}$. Máme tedy obecný tvar řešení, dosazením počátečních podmínek do obecného řešení najdeme to řešení, které vyhovuje počáteční podmínkce. $y(0) = ce^0 = c = 2$, tedy řešením této úlohy je funkce $y(x) = 2e^{-x^2}$.

Příklad 1.6 *(Rozpad radioaktivního materiálu) Příklad je převzatý ze skript J. Kuben (1995): Obyčejné diferenciální rovnice. Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Poloměr rozpadu radia je 1590 let[1]. Za kolik let ubude z počátečního množství 25%?*

Řešení: Označme $y(t)$ množství radia a $y_0 > 0$ jeho počáteční množství v čase $t = 0$. Ze zadání dostáváme rovnici $y' = Ky$, kde K je neznámá konstanta. Navíc víme, že $y(0) = y_0$ a $y(1590) = \frac{y_0}{2}$.

$$\begin{aligned}
y' &= Ky\\
\frac{y'}{y} &= K\\
\ln|y| &= Kt + c, \quad (c \in \mathbb{R})\\
|y| &= ce^{Kt}, \quad (c > 0)\\
y &= ce^{Kt}, \quad (c \in \mathbb{R})^2.
\end{aligned}$$

[1] Počáteční množství se za 1590 let zmenší na polovinu.

Jelikož je množství nezáporné, tak uvažujeme řešení pouze ve tvaru $y(t) = ce^{Kt}$*, kde* $c \geq 0$*. Dosazením počáteční podmínky dostaneme* $y(0) = ce^{K0} = c = y_0$ *a* $y(1590) = y_0 e^{K\cdot 1590} = \frac{y_0}{2}$*, tedy* $K = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1590} = -\frac{\ln 2}{1590}$*. Pro hledaný čas* t_1 *platí*

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}y_0 &= y(t_1) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}t_1} \\ \ln\frac{3}{4} &= -\frac{\ln 2}{1590}t_1 \\ t_1 &= -1590\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 660. \end{aligned}$$

Množství radia se sníží o čtvrtinu přibližne za 660 *let.*

1.1.2 Homogenní rovnice

Definice 1.4 *Funkce* $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se nazývá homogenní stupně* α *v* $M \subset \mathbb{R}^n$*, jestliže pro každé* $\lambda > 0$ *a* $\forall x \in M$ *platí* $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$[3]*. Je-li* $g(x,y) = \frac{m(x,y)}{l(x,y)}$*, kde* m *a* l *jsou homogenní funkce stejného stupně, pak rovnici*

$$y' = g(x,y)$$

nazveme homogenní diferenciální rovnicí.

Pro $g(x,y) = \frac{m(x,y)}{l(x,y)}$ platí,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \frac{m(\lambda x, \lambda y)}{l(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^\alpha m(x,y)}{\lambda^\alpha l(x,y)} = \frac{m(x,y)}{l(x,y)} = g(x,y),$$

tedy g je homogenní funkce stupně 0.

Pro $\lambda = \frac{1}{x}$ tedy dostaneme $g(x,y) = g(\lambda x, \lambda y) = g(1, \frac{y}{x})$, tedy pro $f(z) := g(1,z)$ dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$. Zavedeme neznámou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, pak $y(x) = u(x)x$ a tedy $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Dosazením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= g(x,y) \\ u'x + u &= f(u) \\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}. \end{aligned}$$

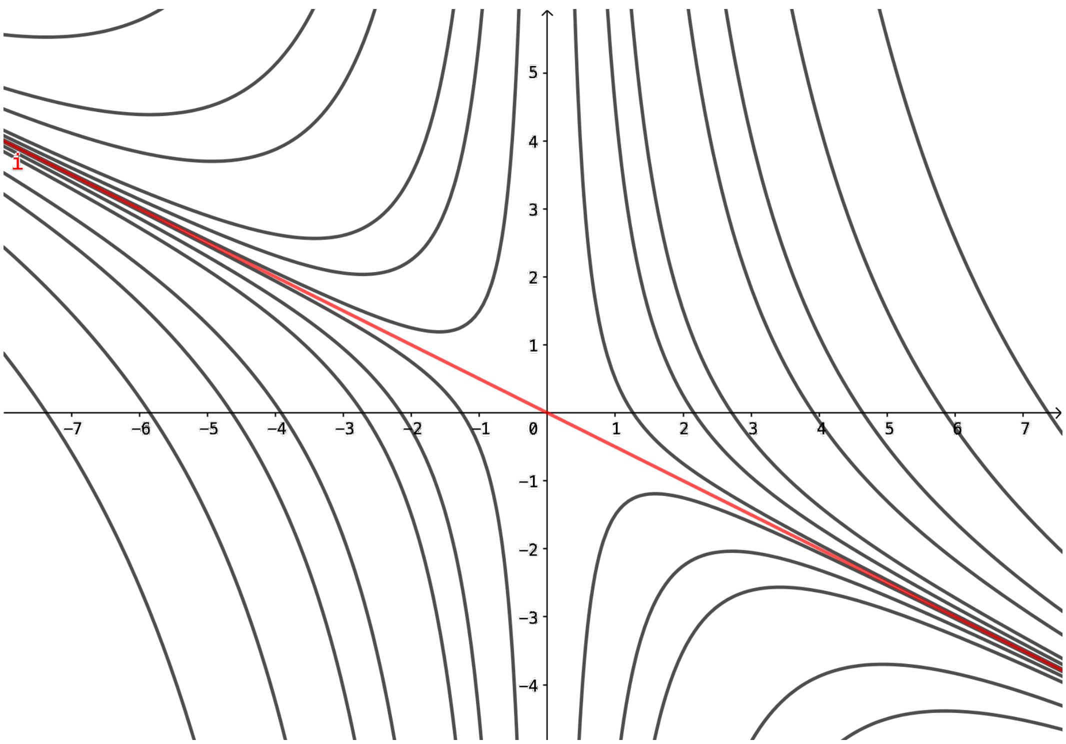
To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již řešíme dle dříve uvedeného postupu.

[2]Zde jsme přidali i triviální řešení $y \equiv 0$.

[3]Všimněme si, že zde hovoříme o funkci n proměnných, tedy $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.2 *Všimněme si, že při úpravách potřebujeme podmínku $x \neq 0$. Tato podmínka ale vzniká při úpravách a při přechodu k původní proměnné zase zmizí, proto je třeba ověřit, zda námi získané řešení není řešením i v bodě $x = 0$.*

Příklad 1.7 *Najděte obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$.*



Řešení: Nejdříve ověříme, že jde o homogenní rovnici. Přepíšem rovnici do tvaru $y' = -\frac{x+y}{x}$, tedy $g(x, y) = -\frac{x+y}{x}$, pak platí $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y)$ a tedy jde o homogenní *rovnici. Použijeme substituci $u(x) = \frac{y}{x}$ a dosadíme do rovnice.*

$$\begin{aligned}
x + y + xy' &= 0 \\
x + ux + x(u'x + u) &= 0 \\
u' &= -\frac{1+2u}{x} \\
\frac{u'}{1+2u} &= -\frac{1}{x}, \quad (u \neq \frac{1}{2}) \\
\frac{\ln|1+2u|}{2} &= -\ln|x| + c \\
|1+2u| &= \frac{c}{x^2}, \quad (c > 0) \\
u &= \frac{\frac{c}{x^2} - 1}{2} = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2}, \quad (c \in \mathbb{R})^4.
\end{aligned}$$

Jelikož $y(x) = u(x)x$, tak dostaneme řešení $y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$, $c \in \mathbb{R}$ a $x > 0$ nebo $x < 0$. Pro $c = 0$ dostaneme řešení $y(x) = -\frac{x}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení jsou znázorněna na předchozím obrázku. Je dobré si uvědomit, že pouze lineární řešení (označené červeně) je definováno na celém $\mathbb{R}$. Ostatní řešení jsou definována pro $x > 0$ a nebo pro $x < 0$,

1.1.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{1.8}$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou reálné funkce, nazveme lineární diferenciální rovnicí prvního řádu. Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na nějakém intervalu J, pak funkce $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ splňuje lokální Lipschitzovu podmínku a tedy dle věty 1.2 každým bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno maximální řešení této rovnice. Lze ukázat, že řešení lze prodloužit na celý interval J.

Věta 1.3 *Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na intervalu J, tak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ existuje právě jedno maximální řešení, které tuto podmínku splňuje.*

[4] Zde jsme přidali i konstantní řešení rovnice $u = -\frac{1}{2}$.

Důkaz

Použijeme-li větu 1.2, stačí ukázat, že je funkce $f(x,y) = b(x) - a(x)y$ lokálně Lipschitzovská v proměnné y. Tedy, že pro každý bod (x_0, y_0) existují okolí U a konstanta K takové, že $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < K|y_1 - y_2|$ $\forall (x, y_i) \in U, i = 1, 2$. Jelikož jsou funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité, tak jsou na uzavřeném intervalu omezené, tedy pro každé $x_0 \in J$ existuje nějaké okolí $U(x_0)$ a konstanta K taková, že $|a(x)| < K$ na $U(x_0)$. Pak pro $x \in U(x_0)$ dostaneme $|b(x) - a(x)y_1 - (b(x) - a(x)y_2)| < K|y_1 - y_2|$, tedy je splněna lokální Lipschitzova podmínka a rovnice má jednoznačné maximální řešení.

□

Definice 1.5 *Rovnice $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ se nazývá homogenní. Je-li $b(x)$ nenulová funkce, tak jde o rovnici nehomogenní.*

Poznámka 1.3 *Nezaměnujme homogenní lineární rovnici s homogenní rovnicí z předchozí kapitoly. Jde o zcela odlišné pojmy.*

Uvažujme nyní homogenní rovnici

$$y' = -a(x)y, \tag{1.9}$$

kde $a(x)$ je spojitá funkce.

Věta 1.4 *Je-li $y_h(x)$ netriviální řešení rovnice 1.9 na intervalu J, pak obecné řešení této rovnice (na tomto intervalu) je ve tvaru $y(x) = cy_h(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

Důkaz

Je-li $y_h(x)$ řešením rovnice 1.9, pak

$$(cy_h(x))' = c(y_h(x)') = c(-a(x)y_h(x)) = -a(x)(cy_h(x))$$

a tedy je i $cy_h(x)$ řešením této rovnice. Nechť existuje řešení $y_1(x)$ (na intervalu J) rovnice 1.9, které není ve tvaru $cy_h(x)$. Je-li $y_0 = y_1(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in J$, pak pro $c = \frac{y_0}{y_h(x_0)}$ splňuje i řešení $cy_h(x)$ počáteční podmínku (x_0, y_0), což je ale v rozporu s jednoznačností (věta 1.3). Tedy každé řešení musí být ve tvaru $cy_h(x)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. □

Označme $A(x)$ primitivní funkci k funkci $a(x)$. Jelikož je homogenní rovnice rovnicí se separovanými proměnnými, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} y' &= -a(x)y \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln|y| &= -A(x) + c \\ y &= ce^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Vraťme se nyní k nehomogenní rovnici 1.8

$$y = -a(x)y + b(x),$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce.

Věta 1.5 *Nechť $y_p(x)$ je řešením rovnice 1.8 a $y_h(x)$ je řešením homogenní rovnice 1.9, pak $y(x) = cy_h(x) + y_p(x)$ pro $c \in \mathbb{R}$ je obecným řešením rovnice 1.8.*

Důkaz

Prostým dosazením ověříme, že je $cy_h(x) + y_p(x)$ řešením rovnice 1.8 Je-li $\hat{y}(x)$ řešením rovnice 1.8, pak $\hat{y}(x) - y_p(x)$ musí být řešením rovnice 1.9 (opět ověříme prostým dosazením) a tedy ve tvaru $cy_h(x)$ dle věty 1.4.

Z uvedené věty vyplývá, že k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice 1.8 stačí najít obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.9 a jedno řešení (partikulární řešení) nehomogenní rovnice 1.8. Obecné řešení homogenní rovnice hledat již umíme, nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice si ukážene nyní pomocí metody variace konstant.

Variace konstant

Nechť $y_h(x)$ je řešení homogenní rovnice 1.9, pak hledejme řešení nehomogenní rovnice 1.8 ve tvaru $y(x) = c(x)y_h(x)$, tj. ve tvaru funkce, kde konstantu c, která nám dává obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.9 nahradíme funkcí $c(x)$. Dosadíme $y(x)$ do nehomogenní rovnice a využijeme toho, že $c(x)y_h' = -c(x)a(x)y_h$[5].

$$\begin{aligned}
(c(x)y_h(x))' &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\
c(x)y_h'(x) + c'(x)y_h(x) &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\
c'(x)y_h(x) &= b(x) \\
c'(x) &= \frac{b(x)}{y_h(x)} \\
c(x) &= \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx.
\end{aligned}$$

Tímto postupem získáme jedno (partikulární) řešení nehomogenní rovnice $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$. Tedy obecné řešení nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = cy_h(x) + \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

[5] Jelikož, y_h je řešením příslušné homogenní rovnice.

Příklad 1.8 *Najděte obecný tvar řešení rovnice* $y' = 2y + x$.

Řešení:

I. Nejdříve budeme hledat řešení homogenní rovnice $y' = 2y$.

$$\begin{aligned} y' &= 2y \\ \frac{y'}{y} &= 2, \quad (y \neq 0) \\ \ln|y| &= 2x + c \\ y &= ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. Nyní použijeme metodu variace konstant k nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Uvažujme řešení ve tvaru $y(x) = c(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned} y' &= 2y + x \\ c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} &= 2c(x)e^{2x} + x \\ c'(x) &= xe^{-2x} \\ c(x) &= \frac{xe^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$y_p(x) = c(x)y_h(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

III. Obecný tvar řešení je tedy

$$y(x) = y_p(x) + cy_h(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}.$$

Ukažme si nyní jiný způsob, jak najít nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.8. Použijeme opět označení $A(x)$ pro primitivní funkci k funkci $a(x)$ a budeme upravovat rovnici 1.8.

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \\ y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} &= b(x)e^{A(x)} \\ \left(y(x)e^{A(x)}\right)' &= b(x)e^{A(x)} \\ y(x)e^{A(x)} &= \int b(x)e^{A(x)}dx \\ y(x) &= e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx. \end{aligned}$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.8 lze napsat ve tvaru $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx$. Porovnejme tento výsledek s řešením získaným pomocí variace konstant. Užitím metody variace konstant jsme dostali partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)}dx \cdot y_h(x).$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce dříve získaný tvar řešení homogenní rovnice $y_h(x) = e^{-A(x)}$, tak dostaneme stejný tvar řešení, tj. $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx$.

Příklad 1.9 *(Bernoulliho rovnice) Řešte rovnici $y' - y = xy^5$. Tato rovnice neni lineární*[6] *(je zde člen y^5), ale k jejímu řešení využijeme toho, že umíme řešit lineární rovnici. Rovnici převedeme do tvaru*

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} = x, \quad y \neq 0.$$

Zde jsme vynechali případ, kdy $y \equiv 0$, který je také řešením této rovnice. Nyní použijeme substituci $u = \frac{1}{y^4}$, tedy dostaneme $u' = -4\frac{y'}{y^5}$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} &= x \\ -\frac{1}{4}u' - u &= x \\ u' &= -4u - 4x. \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici

$$u' = -4u.$$

Tedy máme řešení $u_h(x) = ce^{-4x}$ a použijeme variaci konstant. Hledáme tedy řešení ve tvaru $u(x) = c(x)e^{-4x}$.

$$\begin{aligned} u' &= -4u + 4x \\ c'(x)e^{-4x} - 4xc(x)e^{-4x} &= -4c(x)e^{-4x} + 4x \\ c'(x) &= 4xe^{4x} \\ c(x) &= \int 4xe^{4x}dx = xe^{4x} - \int e^{4x}dx = e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Tedy $u(x) = x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ a řešení původní rovnice dostaneme ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}}}.$$

[6] Rovnice tohoto typu se nazývají Bernoulliho rovnice.

1.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

1.2.1 Lineární diferenciální rovnice

Rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{1.10}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice n-tého řádu. Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, v opačném případě jde o rovnici nehomogenní.

Platí následující věta ohledně existence a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy.

Věta 1.6 *Nechť jsou funkce $b(x)$ a $a_i(x)$ pro $i = 0, 1, ..., n-1$ spojité na intervalu J. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$, pak existuje na J právě jedno řešení $y(x)$ rovnice 1.10 splňující podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Definice 1.6 *Reálné (komplexní) funkce $f_1(x), ..., f_x(x)$ jsou lineárně závislé na množině M, jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla $c_1, ..., c_n$, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$$

na M a alespoň jedno z čísel c_i je nenulové. Pokud nejsou funkce $f_1(x), ..., f_x(x)$ lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Homogenní diferenciální rovnice n-tého řádu

Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1.11}$$

Pak pro tuto rovnici platí následující věta, která je obdobou věty 1.4 pro rovnici prvního řádu.

Věta 1.7 *Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení rovnice 1.11 (na J), pak je řešením této rovnice (na J) i $y_1 + y_2$ a cy_1 pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Tedy řešení homogenní rovnice 1.11 tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je n.*

Důkaz

Nechť je y_1 a y_2 řešením homogenní rovnice 1.11. Dosadíme do této rovnice $y = c_1y_1 + c_2y_2$ a dostaneme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y =$$
$$(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + ... + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$c_1\left(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + ... + a_0(x)y_1\right) + c_2\left(y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + ... + a_0(x)y_2\right) = 0,$$

tedy $c_1y_1 + c_2y_2$ je také řešením homogenní rovnice 1.11.

Nechť $x_0 \in J$ a označme y_i pro $i = 1, ..., n$ řešení rovnice 1.11 splňující počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y_i^{(k)}(x_0) &= 0, \quad i \neq k+1 \\ &= 1, \quad i = k+1, \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, ..., n-1$. Existence takových řešení na J zaručuje věta 1.6. Zároveň jde o nezávislá řešení, jelikož

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i y_i^{(k-1)}(x_0) = 0 \neq 1 = y_k^{(k-1)}(x_0),$$

pro libovolná čísla $c_1, ..., c_n$.

Ukažme, že tato řešení tvoří bázi prostoru řešení homogenní diferenciální rovnice 1.11, tedy že pro libovolná řešení rovnice y existují konstanty $c_i,\ i = 1, ..., n$ takové, že $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Nechť y je libovolné řešení této rovnice, pak pro $c_i = y^{(i-1)}(x_0)$ platí, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t_0)\right)^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = c_{k+1}y_{k+1}^{(k)}(x_0) = c_{k+1} = y^{(k)}(x_0).$$

Tedy řešení rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ splňuje stejné počáteční podmínky jako řešení y a tedy se tyto dvě řešení musí rovnat dle věty 1.6.

Definice 1.7 *Množinu n nezávislých řešení homogenní rovnice 1.11 na J nazýváme fundamentální systém řešení této rovnice na J.*

Definice 1.8 *Nechť $f_1, ..., f_n$ mají v bodě x_0 derivace až do řádu $n-1$ včetně. Pak determinant*

$$\det\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & ... & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & ... & f_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n)}(x_0) & f_2^{(n)}(x_0) & ... & f_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazveme Wronského determinant (nebo Wronskiánem) funkcí $f_1, ..., f_n$ v bodě x_0 a označíme jej $W(f_1, ..., f_n)(x_0)$.

Věta 1.8 *Nechť $y_1, ..., y_n$ jsou řešení homogenní rovnice 1.11 na intervalu J. Je-li*

$$W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0,$$

pro nějaké $x_0 \in J$, tak jsou $y_1, ..., y_n$ lineárně nezávislé na J a $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$.

Důkaz

Je-li $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 0$, tak jsou sloupce v determinantu $W(y_1, ..., y_n)(x_0)$ lineárně závislé, tedy existují konstanty $c_1, ..., c_n$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Označme $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, pak y je také řešením rovnice 1.11 (věta 1.7) a navíc platí, že $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, 1, ..., n-1$. Jelikož $y \equiv 0$ splňuje tuto podmínku, tak z jednoznačnosti řešení lineární rovnice (věta 1.6) plyne $y \equiv 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$ na J a proto jsou řešení y_i lineárně závislá. Z lineární závislosti řešení $y_1, ..., y_n$ na J plyne lineární závislost sloupců v determinantu $W(y_1, ..., y_n)(x)$ na J a tedy $W(y_1, ..., y_n)(x) = 0$ na J.

Důsledek 1.9 *Buď je $W(y_1, ..., y_n)(x) = 0$ na J, nebo $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ na J. Množine řešení rovnice 1.7 je nezávislá na J právě tehdy, když $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ na J.*

Poznámka 1.4 *Předchozí kritérium nezávislosti neplatí obecně pro n-tici funkcí $f_1, ..., f_n$ která není řešením nějaké homogenní lineární diferenciální rovnice. Obecně platí, že z podmínky $W(f_1, ..., f_n) \neq 0$ na J plyne nezávislost funkcí $f_1, ..., f_n$ na J. Opak obecně neplatí.*

Příklad 1.10 *Nechť $J = (-1, 1)$ a*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \quad x < 0 \\ &= x^3, \quad x \geq 0 \\ f_2(x) &= x^2, \quad x < 0 \\ &= 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Pak $W(f_1, f_2)(x) = 0$ na J, ale je-li $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$, tedy f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé.

Věta 1.10 *Nechť jsou* $y_1, ..., y_n$ *řešením rovnice 1.11 na intervalu* J*, pak pro* $x, x_0 \in J$ *platí*

$$\frac{d}{dx}(W(y_1, ..., y_n)(x)) = -a_{n-1}(x)W(y_x, ..., y_n)(x),$$

tedy

$$W(y_1, ..., y_n)(x) = W(y_1, ..., y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}. \tag{1.12}$$

Důkaz

Podívejme se nejdříve na případ pro $n = 2$, pak $W(y_1, y_2)(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$, tedy

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(W(y_1, y_2)(x)) &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' \\
&= (y_1'y_2' - y_1'y_2') + (y_1y_2'' - y_1''y_2) \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Označme $dW_n = \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2, ..., y_n)(x))$. Obdobně jeko v dvoudimenzionálním případě lze ukázat, že

$$\begin{aligned}
dW_n = \det &\begin{pmatrix} y_1' & ... & y_n' \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + ... \\
+ \det &\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \\
= \det &\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z faktu, ze v prvních $n - 1$ determinantech jsou vždy dva řádky stejné, a tak jsou tyto determinanty nulové. Jelikož y_i pro $i = 1, ..., n$ je řešením rovnice 1.11, tak dosadíme-li $y_i^{(n)} = -a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - a_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - ... - a_0(x)y_i$ do předchozímo výrazu, dostaneme

$$dW_n = \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ -a_{n-1}y_1^{(n-1)} - ... - a_0y_1 & ... & -a_{n-1}y_n^{(n-1)} - ... - a_0y_n \end{pmatrix}.$$

Použijem to, že vynásobíme-li nějaký řádem matice konstantou a, tak je determinant nové matice a krát větší, než determinant matice původní a také toho, že determinant matice, jejíž řádek je tvořen součtem vektorů lze rozložit na součet determinantů. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} dW_n = & - a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} - ... \\ & - a_{n-2}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} - ... \\ & - a_0(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1 & ... & y_n \end{pmatrix} - ... \\ = & - a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(y_1, ..., y_n)(x). \end{aligned}$$

Jelikož právě dokázaná rovnost je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými (jde o diferenciální rovnici, kde neznámá funkce je funkce wronskiánu, tedy pro každé x vrací hodnotu wronskiánu v tomto bodě), tak druhý vztah je jejím přímým důsledkem. $\square$

Metoda nalezení druhého řešení za pomocí Wronskiánu

Uvažujme rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.13}$$

a nechť y_1 je jedno netriviální známé řešení této rovnice. Pak pro libovolné řešení y této rovnice platí

$$W(y_1, y)(x) = y_1 y' - y_1' y = W(y_1, y)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Zvolíme nyní $W(y_1, y)(x_0) = 1$.[6] Dostaneme tedy rovnici

$$y_1 y' - y_1' y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{1.14}$$

Je-li y řešením rovnice 1.13, pak musí jít o řešení, které je nezávislé s řešením y_1, jelikož wronskián $W(y_1, y)(x) \neq 0$.

Je-li naopak y řešením rovnice 1.14, pak

$$\begin{aligned}
y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \\
(y_1 y' - y_1' y)' &= p(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1' y' + y_1 y'' - y_1'' y - y_1' y' &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' - y_1'' y &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' - (-p(x) y_1' - q(x) y_1) y &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' + q(x) y_1 y &= -p(x) y_1 y' \\
y_1 (y'' + p(x) y' + q(x) y) &= 0.
\end{aligned}$$

Tedy y je řešením rovnice 1.13. Dále upravama rovnice 1.14 dostanem

$$\begin{aligned}
y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \\
\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} &= \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} \\
\left(\frac{y}{y_1}\right)' &= \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} \\
\frac{y}{y_1} &= \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2(x)} dx \\
y &= y_1 \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2(x)} dx.
\end{aligned}$$

Tedy jsme našli vzorec pro určení druhého řešení rovnice 1.13, které je lineárně nezávislé s řešením y_1.

[6] Jelikož je y řešením lineární homogenní diferenciální rovnice, tak i cy je řešením této rovnice, takže volbou Wronskiánu v bodě x_0 měníme y maximálně o multiplikativní konstantu.

Příklad 1.11 *Najděme obecné řešení rovnice* $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$, *víme-li, že má tato rovnice jedno řešení* $y_1(x) = x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y}{y_1}\right)' &= \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^4} = \frac{e^{-\ln x}}{x^4} = \frac{1}{x^5} \\
\frac{y}{x^2} &= \int \frac{1}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4} \\
y &= -\frac{1}{4x^2}.
\end{aligned}$$

Druhé řešení této rovnice je tedy $y_2 = \frac{1}{x^2}$ *a obecné řešení je ve tvaru*

$$y(x) = c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme, že známe jedno nenulové řešení y_1 homogenní rovnice 1.11. Hledejme další řešení ve tvaru $y(x) = u(x)y_1(x)$, pak

$$\begin{aligned}
y' &= u'y_1 + uy_1' \\
y'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \\
&\dots \\
y^{(n)} &= u^{(n)}y_1 + \binom{n}{1}u^{(n-1)}y_1' + \dots + uy_1^{(n)}.
\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme rovnici

$$\begin{aligned}
u^{(n)}y_1 + b_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + b_1(x)u' + \\
+u\left(y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y\right) = 0,
\end{aligned}$$

kde funkce $b_i(x)$ jdou vyjádřit pomocí funkcí $a_j(x)$ a řešení $y_1(x)$. Vydělením předešlé rovnice řešením y_1 dostaneme rovnici

$$u^{(n)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}u^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}u' = 0.$$

Použitím substituce $v(x) = u'(x)$ dostaneme lineární homogení rovnici $(n-1)$-ního řádu

$$v^{(n-1)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}v^{(n-2)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}v = 0.$$

Příklad 1.12 *Vraťme se k předchozímu příkladu. Mějme rovnici* $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$*,* $x > 0$ *a jedno její řešení* $y_1(x) = x^2$*.*

Řešení: Užijeme substituci $y = uy_1$*, dosaďme do rovnice, pak použijeme substituci* $v = u'$ *a vyřešíme rovnici.*

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} &= 0 \\
u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + \frac{u'y_1 + uy_1'}{x} + \frac{-4uy_1}{x^2} &= 0 \\
u''x^2 + 4u'x + 2u + \frac{u'x^2 + 2ux}{x} + \frac{-4ux^2}{x^2} &= 0 \\
u''x^2 + 4u'x + u'x &= 0 \\
v'x^2 + 5vx &= 0 \\
v' &= \frac{-5v}{x} \\
\frac{v'}{v} &= \frac{-5}{x} \\
\ln|v| &= \ln|x^{-5}| \\
v &= x^{-5}.
\end{aligned}$$

Tedy $u = \int v dx = \frac{-1}{4x^4}$ *a proto* $y = uy_1 = \frac{-1}{4x^4}x^2 = \frac{-1}{4x^2}$*. Tedy fundamentální systém této rovnice je* $y_1 = x^2$ *a* $y_2 = \frac{1}{x^2}$*.*