Kapitola 1

Diferenciální rovnice

Definice 1.1 *Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Není-li F konstantní funkce vzhledem k poslední proměnné, mluvíme o diferenciální rovnici n-tého řádu.

Definice 1.2 *Řešením rovnice 1.1 rozumíme reálnou funkci $y(x)$ definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která ma v I vlastní n-tou derivaci a pro každé $x \in I$ platí:*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Řešení y rovnice 1.1 nazveme maximální, jestliže neexistuje řešení této rovnice z takové, že $D_y \subsetneq D_z$ a $y(x) = z(x)$ na D_y.

Příklad 1.1 *Rovnice $y' - y = 0$ má řešení $y(t) = e^t$ na $\mathbb{R}$ (toto řešení je maximální).*

Definice 1.3 *Říkáme, že řešení $y(x)$ rovnice 1.1 splňuje počáteční podmínky $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ v bodě t_0, jestliže $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, $x_0, y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$.*

Úloha nalézt řešení $y(x)$ diferenciální rovnice 1.2, které splňuje počáteční podmínku $y^{(k)}(x_0) = y_k$ pro $x_0 \in I$ a $k = 0, 1, ..., n-1$ se nazývá Cauchyova úloha.

1.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Dále se budeme zabývat rovnicemi ve tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných, definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^2$.

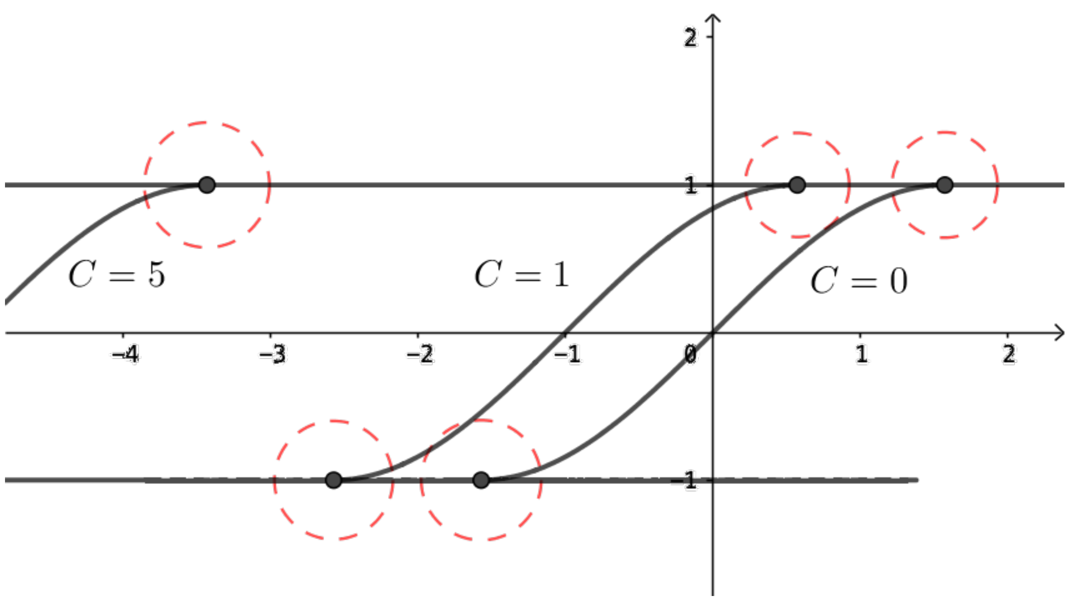
Uvedeme si následující větu bez důkazu.

Věta 1.1 *(Peanove - existenční) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$ a $(x_0, y_0) \in M$ je libovolný bod. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice 1.2 procházející tímto bodem. Tj. existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $y'(x) = f(x, y(x))$ a navíc platí: $y^{(k)}(x_0) = y_k$ pro $k = 0, 1$.*

Příklad 1.2 *Uvažujme rovnici $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Tato rovnice má řešení $y(x) \equiv \pm 1$ na $\mathbb{R}$ i*

$$y_c = \begin{cases} -1, & x < -C - \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x + C), & -C - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -C + \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > -C + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

kde C je libovolná reálná konstanta.



Na obrázku jsou znázorněna jak konstantní řešení $y = \pm 1$, tak nekonstantní řešení s volbou konstant $C = 0,1$ a $C = 5$. Jak je z obrázku patrné, v červeně vyznačených bodech se konstantní a nekonstantní řešení rozpojují (je zde nejednoznačnost řešení). Otázkou je, zda existují podmínky na rovnici 1.2, které zaručují, že takové chování nenastane.

Věta 1.2 *(Picardova - o jednoznačnosti řešení) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$, která navíc splňuje lokální Lipschitzovu podmínku v proměnné y, tj: Ke každému bodu $(x_0, y_0) \in M$ existuje okolí $U(x_0, y_0)$ tohoto bodu a číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ pro každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in U$. Potom existuje právě jedno maxímální řešení rovnice 1.2 procházející bodem (x_0, y_0).*

1.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nazveme rovnicí se separovanými proměnnými, pokud má tvar

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.3}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Je-li $g \neq 0$, tak z rovnice 1.3 dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zintegrováním této rovnice dostaneme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Je-li $G(y)$ primitivní dunkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, tak dostaneme rovnici

$$G(y) = F(x) + c,$$

tedy

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

Poznámka 1.1 *Je důležité nezapomenout na integrační konstantu c, ta nám umožňuje najít řešení, které splňuje konkrétní počáteční podmínku.*

Příklad 1.3 *Najděte řešení rovnice* $y' = \sqrt{|y|}$.

Řešení: Pro $y \neq 0$ *dostaneme*

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \\ \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= 1 \\ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= \int 1 dx \\ 2\ \mathrm{sgn}(y)\sqrt{|y|} &= x + c. \end{aligned}$$

Jelikož $\sqrt{|y|} > 0$, *tak* y *a* $x + c$ *má stejné znaménko, tedy pro* $x > -c$ *dostaneme*

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= \frac{x+c}{2} \\ y &= \frac{(x+c)^2}{4}, \quad x > -c. \end{aligned}$$

Stejně dostaneme

$$y = -\frac{(x+c)^2}{4}, \quad x < -c.$$

Pro $y = 0$ *dostaneme konstantní řešení* $y(x) = 0$.

Příklad 1.4 *Najděte řešení rovnice* $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Řešení:

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x} \tag{1.5}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x} dx \tag{1.6}$$

$$\mathrm{arcsin} y = \ln|x| + c. \tag{1.7}$$

Zde je třeba si uvědomit, že obor hodnot funkce arcsin *je* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *tedy rovnost* $\mathrm{arcsin} y = \ln|x| + c$ *platí pro takové* x *a* c, *pro které je* $\ln|x| + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Dále tedy dostaneme* $y = \sin(\ln|x| + c)$, *pro* $x \in (e^{\frac{-\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c})$. *Zkusme třeba pro volbu* $c = 0$ *a* $x \in (e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\pi})$ *zjistit, zda je funkce* $y = \sin(\ln|x| + c) = \sin(\ln|x|)$ *řešením naší rovnice. Pak dostaneme, že*

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

a

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(\ln x)}}{x} = \frac{\sqrt{\cos(\ln x)}}{x} = \frac{-\cos(\ln x)}{x}.$$

Tedy pro takové c *a* t *je* $y(x)$ *řešením rovnice* $y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Příklad 1.5 *Řešte Cauchyho úlohu* $y \; = -2xy$, $y(0) = 2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
y' &= -2xy \\
\frac{dy}{y} &= -2x dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int 2x dx \\
\ln|y| &= -x^2 + c \\
|y| &= e^c \cdot e^{-x^2} \\
y &= \pm e^c \cdot e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Jelikož je řešením i $y \equiv 0$, *tak můžeme obecné řešení napsat ve tvaru* $y = ce^{-x^2}$ *, kde* $c \in \mathbb{R}$. *Máme tedy obecný tvar řešení, dosazením počátečních podmínek do obecného řešení najdeme to řešení, které vyhovuje počáteční podmínkce.* $y(0) = ce^0 = c = 2$, *tedy řešením této úlohy je funkce* $y(x) = 2e^{-x^2}$.

Příklad 1.6 *(Rozpad radioaktivního materiálu) Příklad je převzatý ze skript J. Kuben (1995): Obyčejné diferenciální rovnice. Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Poloměr rozpadu radia je* 1590 *let*[1]. *Za kolik let ubude z počátečního množství* 25%*?*

Řešení: Označme $y(t)$ *množství radia a* $y_0 > 0$ *jeho počáteční množství v čase* $t = 0$. *Ze zadání dostáváme rovnici* $y' = Ky$, *kde* K *je neznámá konstanta. Navíc víme, že* $y(0) = y_0$ *a* $y(1590) = \frac{y_0}{2}$.

$$\begin{aligned}
y' &= Ky \\
\frac{y'}{y} &= K \\
\ln|y| &= Kt + c, \quad (c \in \mathbb{R}) \\
|y| &= ce^{Kt}, \quad (c > 0) \\
y &= ce^{Kt}, \quad (c \in \mathbb{R})^2.
\end{aligned}$$

[1] Počáteční množství se za 1590 let zmenší na polovinu.

Jelikož je množství nezáporné, tak uvažujeme řešení pouze ve tvaru $y(t) = ce^{Kt}$*, kde* $c \geq 0$*. Dosazením počáteční podmínky dostaneme* $y(0) = ce^{K0} = c = y_0$ *a* $y(1590) = y_0 e^{K\cdot 1590} = \frac{y_0}{2}$*, tedy* $K = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1590} = -\frac{\ln 2}{1590}$*. Pro hledaný čas* t_1 *platí*

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}y_0 &= y(t_1) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}t_1}\\ \ln\frac{3}{4} &= -\frac{\ln 2}{1590}t_1\\ t_1 &= -1590\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 660.\end{aligned}$$

Množství radia se sníží o čtvrtinu přibližne za 660 *let.*

1.1.2 Homogenní rovnice

Definice 1.4 *Funkce* $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se nazývá homogenní stupně* α *v* $M \subset \mathbb{R}^n$*, jestliže pro každé* $\lambda > 0$ *a* $\forall x \in M$ *platí* $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$[3]*. Je-li* $g(x,y) = \frac{m(x,y)}{l(x,y)}$*, kde* m *a* l *jsou homogenní funkce stejného stupně, pak rovnici*

$$y' = g(x,y)$$

nazveme homogenní diferenciální rovnicí.

Pro $g(x,y) = \frac{m(x,y)}{l(x,y)}$ platí,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \frac{m(\lambda x, \lambda y)}{l(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^\alpha m(x,y)}{\lambda^\alpha l(x,y)} = \frac{m(x,y)}{l(x,y)} = g(x,y),$$

tedy g je homogenní funkce stupně 0.

Pro $\lambda = \frac{1}{x}$ tedy dostaneme $g(x,y) = g(\lambda x, \lambda y) = g(1, \frac{y}{x})$, tedy pro $f(z) := g(1,z)$ dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$. Zavedeme neznámou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, pak $y(x) = u(x)x$ a tedy $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Dosazením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}y' &= g(x,y)\\ u'x + u &= f(u)\\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}.\end{aligned}$$

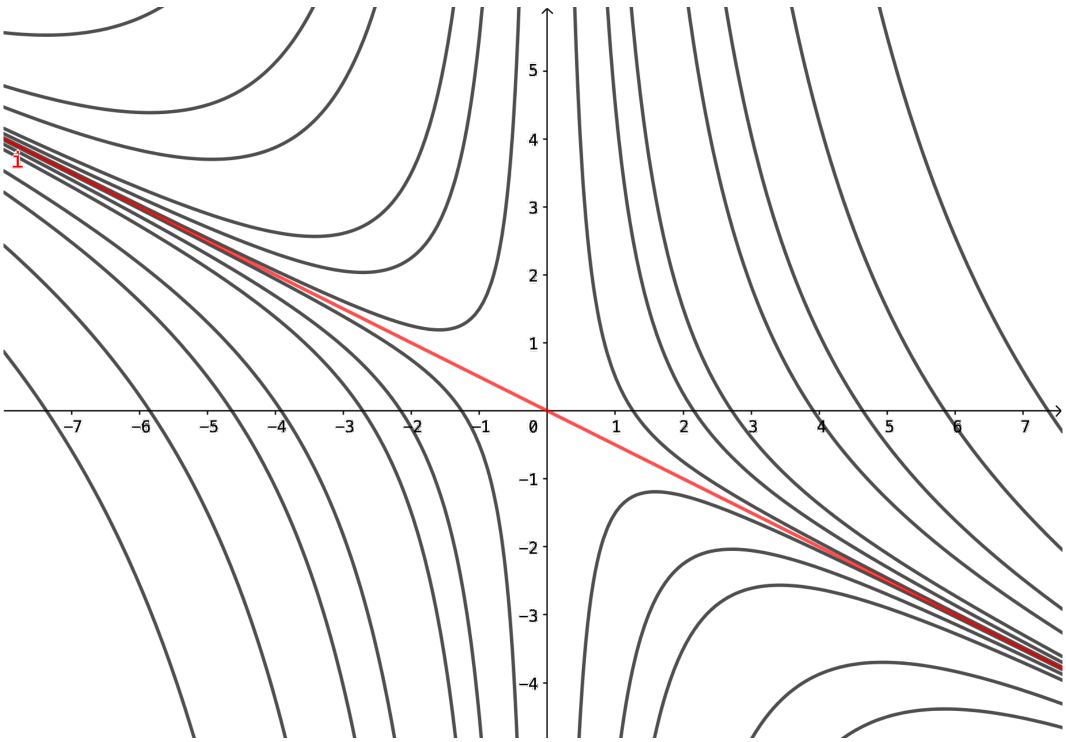
To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již řešíme dle dříve uvedeného postupu.

[2] Zde jsme přidali i triviální řešení $y \equiv 0$.

[3] Všimněme si, že zde hovoříme o funkci n proměnných, tedy $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.2 *Všimněme si, že při úpravách potřebujeme podmínku $x \neq 0$. Tato podmínka ale vzniká při úpravách a při přechodu k původní proměnné zase zmizí, proto je třeba ověřit, zda námi získané řešení není řešením i v bodě $x = 0$.*

Příklad 1.7 *Najděte obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$.*



Řešení: Nejdříve ověříme, že jde o homogenní rovnici. Přepíšem rovnici do tvaru $y' = -\frac{x+y}{x}$, tedy $g(x, y) = -\frac{x+y}{x}$, pak platí $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y)$ a tedy jde o homogenní *rovnici. Použijeme substituci $u(x) = \frac{y}{x}$ a dosadíme do rovnice.*

$$
\begin{aligned}
x + y + xy' &= 0 \\
x + ux + x(u'x + u) &= 0 \\
u' &= -\frac{1+2u}{x} \\
\frac{u'}{1+2u} &= -\frac{1}{x}, \quad (u \neq \frac{1}{2}) \\
\frac{\ln|1+2u|}{2} &= -\ln|x| + c \\
|1+2u| &= \frac{c}{x^2}, \quad (c > 0) \\
u &= \frac{\frac{c}{x^2} - 1}{2} = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2}, \quad (c \in \mathbb{R})^4.
\end{aligned}
$$

Jelikož $y(x) = u(x)x$, tak dostaneme řešení $y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$, $c \in \mathbb{R}$ a $x > 0$ nebo $x < 0$. Pro $c = 0$ dostaneme řešení $y(x) = -\frac{x}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení jsou znázorněna na předchozím obrázku. Je dobré si uvědomit, že pouze lineární řešení (označené červeně) je definováno na celém $\mathbb{R}$. Ostatní řešení jsou definována pro $x > 0$ a nebo pro $x < 0$,

1.1.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{1.8}$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou reálné funkce, nazveme lineární diferenciální rovnicí prvního řádu. Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na nějakém intervalu J, pak funkce $f(x,y) = b(x) - a(x)y$ splňuje lokální Lipschitzovu podmínku a tedy dle věty 1.2 každým bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno maximální řešení této rovnice. Lze ukázat, že řešení lze prodloužit na celý interval J.

Věta 1.3 *Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na intervalu J, tak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ existuje právě jedno maximální řešení, které tuto podmínku splňuje.*

[4] Zde jsme přidali i konstantní řešení rovnice $u = -\frac{1}{2}$.

Důkaz

Použijeme-li větu 1.2, stačí ukázat, že je funkce $f(x,y) = b(x)-a(x)y$ lokálně Lipschitzovská v proměnné y. Tedy, že pro každý bod (x_0,y_0) existují okolí U a konstanta K takové, že $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| < K|y_1-y_2|\ \forall (x,y_i) \in U, i = 1,2$. Jelikož jsou funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité, tak jsou na uzavřeném intervalu omezené, tedy pro každé $x_0 \in J$ existuje nějaké okolí $U(x_0)$ a konstanta K taková, že $|a(x)| < K$ na $U(x_0)$. Pak pro $x \in U(x_0)$ dostaneme $|b(x)-a(x)y_1-(b(x)-a(x)y_2)| < K|y_1-y_2|$, tedy je splněna lokální Lipschitzova podmínka a rovnice má jednoznačné maximální řešení.

□

Definice 1.5 *Rovnice $y'(x)+a(x)y(x) = 0$ se nazývá homogenní. Je-li $b(x)$ nenulová funkce, tak jde o rovnici nehomogenní.*

Poznámka 1.3 *Nezaměnujme homogenní lineární rovnici s homogenní rovnicí z předchozí kapitoly. Jde o zcela odlišné pojmy.*

Uvažujme nyní homogenní rovnici

$$y' = -a(x)y, \tag{1.9}$$

kde $a(x)$ je spojitá funkce.

Věta 1.4 *Je-li $y_h(x)$ netriviální řešení rovnice 1.9 na intervalu J, pak obecné řešení této rovnice (na tomto intervalu) je ve tvaru $y(x) = cy_h(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

Důkaz

Je-li $y_h(x)$ řešením rovnice 1.9, pak

$$(cy_h(x))' = c(y_h(x)') = c(-a(x)y_h(x)) = -a(x)(cy_h(x))$$

a tedy je i $cy_h(x)$ řešením této rovnice. Nechť existuje řešení $y_1(x)$ (na intervalu J) rovnice 1.9, které není ve tvaru $cy_h(x)$. Je-li $y_0 = y_1(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in J$, pak pro $c = \frac{y_0}{y_h(x_0)}$ splňuje i řešení $cy_h(x)$ počáteční podmínku (x_0,y_0), což je ale v rozporu s jednoznačností (věta 1.3). Tedy každé řešení musí být ve tvaru $cy_h(x)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. □

Označme $A(x)$ primitivní funkci k funkci $a(x)$. Jelikož je homogenní rovnice rovnicí se separovanými proměnnými, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} y' &= -a(x)y \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln|y| &= -A(x) + c \\ y &= ce^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Vraťme se nyní k nehomogenní rovnici 1.8

$$y \ = -a(x)y + b(x),$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce.

Věta 1.5 *Nechť $y_p(x)$ je řešením rovnice 1.8 a $y_h(x)$ je řešením homogenní rovnice 1.9, pak $y(x) = cy_h(x) + y_p(x)$ pro $c \in \mathbb{R}$ je obecným řešením rovnice 1.8.*

Důkaz

Prostým dosazením ověříme, že je $cy_h(x) + y_p(x)$ řešením rovnice 1.8 Je-li $\hat{y}(x)$ řešením rovnice 1.8, pak $\hat{y}(x) - y_p(x)$ musí být řešením rovnice 1.9 (opět ověříme prostým dosazením) a tedy ve tvaru $cy_h(x)$ dle věty 1.4.

Z uvedené věty vyplývá, že k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice 1.8 stačí najít obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.9 a jedno řešení (partikulární řešení) nehomogenní rovnice 1.8. Obecné řešení homogenní rovnice hledat již umíme, nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice si ukážene nyní pomocí metody variace konstant.

Variace konstant

Nechť $y_h(x)$ je řešení homogenní rovnice 1.9, pak hledejme řešení nehomogenní rovnice 1.8 ve tvaru $y(x) = c(x)y_h(x)$, tj. ve tvaru funkce, kde konstantu c, která nám dává obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.9 nahradíme funkcí $c(x)$. Dosadíme $y(x)$ do nehomogenní rovnice a využijeme toho, že $c(x)y_h' = -c(x)a(x)y_h$[5].

$$\begin{aligned}
(c(x)y_h(x))' &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\
c(x)y_h'(x) + c'(x)y_h(x) &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\
c'(x)y_h(x) &= b(x) \\
c'(x) &= \frac{b(x)}{y_h(x)} \\
c(x) &= \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx.
\end{aligned}$$

Tímto postupem získáme jedno (partikulární) řešení nehomogenní rovnice $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$. Tedy obecné řešení nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = cy_h(x) + \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

[5] Jelikož, y_h je řešením příslušné homogenní rovnice.

Příklad 1.8 *Najděte obecný tvar řešení rovnice $y' = 2y + x$.*

Řešení:

I. *Nejdříve budeme hledat řešení homogenní rovnice $y' = 2y$.*

$$\begin{aligned} y' &= 2y \\ \frac{y'}{y} &= 2, \quad (y \neq 0) \\ \ln|y| &= 2x + c \\ y &= ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. *Nyní použijeme metodu variace konstant k nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Uvažujme řešení ve tvaru $y(x) = c(x)e^{2x}$.*

$$\begin{aligned} y' &= 2y + x \\ c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} &= 2c(x)e^{2x} + x \\ c'(x) &= xe^{-2x} \\ c(x) &= \frac{xe^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$y_p(x) = c(x)y_h(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

III. *Obecný tvar řešení je tedy*

$$y(x) = y_p(x) + cy_h(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}.$$

Ukažme si nyní jiný způsob, jak najít nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.8. Použijeme opět označení $A(x)$ pro primitivní funkci k funkci $a(x)$ a budeme upravovat rovnici 1.8.

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \\ y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} &= b(x)e^{A(x)} \\ \left(y(x)e^{A(x)}\right)' &= b(x)e^{A(x)} \\ y(x)e^{A(x)} &= \int b(x)e^{A(x)}dx \\ y(x) &= e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx. \end{aligned}$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.8 lze napsat ve tvaru $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx$. Porovnejme tento výsledek s řešením získaným pomocí variace konstant. Užitím metody variace konstant jsme dostali partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)}dx \cdot y_h(x).$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce dříve získaný tvar řešení homogenní rovnice $y_h(x) = e^{-A(x)}$, tak dostaneme stejný tvar řešení, tj. $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx$.

Příklad 1.9 *(Bernoulliho rovnice) Řešte rovnici $y' - y = xy^5$. Tato rovnice neni lineární*[6] *(je zde člen y^5), ale k jejímu řešení využijeme toho, že umíme řešit lineární rovnici. Rovnici převedeme do tvaru*

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} = x, \quad y \neq 0.$$

Zde jsme vynechali případ, kdy $y \equiv 0$, který je také řešením této rovnice. Nyní použijeme substituci $u = \frac{1}{y^4}$, tedy dostaneme $u' = -4\frac{y'}{y^5}$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} &= x \\ -\frac{1}{4}u' - u &= x \\ u' &= -4u - 4x. \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici

$$u' = -4u.$$

Tedy máme řešení $u_h(x) = ce^{-4x}$ a použijeme variaci konstant. Hledáme tedy řešení ve tvaru $u(x) = c(x)e^{-4x}$.

$$\begin{aligned} u' &= -4u + 4x \\ c'(x)e^{-4x} - 4xc(x)e^{-4x} &= -4c(x)e^{-4x} + 4x \\ c'(x) &= 4xe^{4x} \\ c(x) &= \int 4xe^{4x}dx = xe^{4x} - \int e^{4x}dx = e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Tedy $u(x) = x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ a řešení původní rovnice dostaneme ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}}}.$$

[6] Rovnice tohoto typu se nazývají Bernoulliho rovnice.

1.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

1.2.1 Lineární diferenciální rovnice

Rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{1.10}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice n-tého řádu. Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, v opačném případě jde o rovnici nehomogenní.

Platí následující věta ohledně existence a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy.

Věta 1.6 *Nechť jsou funkce $b(x)$ a $a_i(x)$ pro $i = 0, 1, ..., n-1$ spojité na intervalu J. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$, pak existuje na J právě jedno řešení $y(x)$ rovnice 1.10 splňující podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Definice 1.6 *Reálné (komplexní) funkce $f_1(x), ..., f_x(x)$ jsou lineárně závislé na množině M, jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla $c_1, ..., c_n$, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$$

na M a alespoň jedno z čísel c_i je nenulové. Pokud nejsou funkce $f_1(x), ..., f_x(x)$ lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Homogenní diferenciální rovnice n-tého řádu

Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1.11}$$

Pak pro tuto rovnici platí následující věta, která je obdobou věty 1.4 pro rovnici prvního řádu.

Věta 1.7 *Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení rovnice 1.11 (na J), pak je řešením této rovnice (na J) i $y_1 + y_2$ a cy_1 pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Tedy řešení homogenní rovnice 1.11 tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je n.*

Důkaz

Nechť je y_1 a y_2 řešením homogenní rovnice 1.11. Dosadíme do této rovnice $y = c_1y_1 + c_2y_2$ a dostaneme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y =$$
$$(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + ... + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$c_1\left(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + ... + a_0(x)y_1\right) + c_2\left(y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + ... + a_0(x)y_2\right) = 0,$$

tedy $c_1y_1 + c_2y_2$ je také řešením homogenní rovnice 1.11.

Nechť $x_0 \in J$ a označme y_i pro $i = 1, ..., n$ řešení rovnice 1.11 splňující počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y_i^{(k)}(x_0) &= 0, \quad i \neq k+1 \\ &= 1, \quad i = k+1, \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, ..., n-1$. Existence takových řešení na J zaručuje věta 1.6. Zároveň jde o nezávislá řešení, jelikož

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i y_i^{(k-1)}(x_0) = 0 \neq 1 = y_k^{(k-1)}(x_0),$$

pro libovolná čísla $c_1, ..., c_n$.

Ukažme, že tato řešení tvoří bázi prostoru řešení homogenní diferenciální rovnice 1.11, tedy že pro libovolná řešení rovnice y existují konstanty $c_i,\ i = 1, ..., n$ takové, že $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Nechť y je libovolné řešení této rovnice, pak pro $c_i = y^{(i-1)}(x_0)$ platí, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t_0)\right)^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = c_{k+1}y_{k+1}^{(k)}(x_0) = c_{k+1} = y^{(k)}(x_0).$$

Tedy řešení rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ splňuje stejné počáteční podmínky jako řešení y a tedy se tyto dvě řešení musí rovnat dle věty 1.6.

Definice 1.7 *Množinu n nezávislých řešení homogenní rovnice 1.11 na J nazýváme fundamentální systém řešení této rovnice na J.*

Definice 1.8 *Nechť $f_1, ..., f_n$ mají v bodě x_0 derivace až do řádu $n-1$ včetně. Pak determinant*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & ... & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & ... & f_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n)}(x_0) & f_2^{(n)}(x_0) & ... & f_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazveme Wronského determinant (nebo Wronskiánem) funkcí $f_1, ..., f_n$ v bodě x_0 a označíme jej $W(f_1, ..., f_n)(x_0)$.

Věta 1.8 *Nechť $y_1, ..., y_n$ jsou řešení homogenní rovnice 1.11 na intervalu J. Je-li*

$$W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0,$$

pro nějaké $x_0 \in J$, tak jsou $y_1, ..., y_n$ lineárně nezávislé na J a $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$.

Důkaz

Je-li $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 0$, tak jsou sloupce v determinantu $W(y_1, ..., y_n)(x_0)$ lineárně závislé, tedy existují konstanty $c_1, ..., c_n$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Označme $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, pak y je také řešením rovnice 1.11 (věta 1.7) a navíc platí, že $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, 1, ..., n-1$. Jelikož $y \equiv 0$ splňuje tuto podmínku, tak z jednoznačnosti řešení lineární rovnice (věta 1.6) plyne $y \equiv 0$, tedy $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$ na J a proto jsou řešení y_i lineárně závislá. Z lineární závislosti řešení $y_1, ..., y_n$ na J plyne lineární závislost sloupců v determinantu $W(y_1, ..., y_n)(x)$ na J a tedy $W(y_1, ..., y_n)(x) = 0$ na J.

Důsledek 1.9 *Buď je $W(y_1, ..., y_n)(x) = 0$ na J, nebo $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ na J. Množine řešení rovnice 1.7 je nezávislá na J právě tehdy, když $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ na J.*

Poznámka 1.4 *Předchozí kritérium nezávislosti neplatí obecně pro n-tici funkcí $f_1, ..., f_n$ která není řešením nějaké homogenní lineární diferenciální rovnice. Obecně platí, že z podmínky $W(f_1, ..., f_n) \neq 0$ na J plyne nezávislost funkcí $f_1, ..., f_n$ na J. Opak obecně neplatí.*

Příklad 1.10 *Nechť $J = (-1, 1)$ a*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \quad x < 0 \\ &= x^3, \quad x \geq 0 \\ f_2(x) &= x^2, \quad x < 0 \\ &= 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Pak $W(f_1, f_2)(x) = 0$ na J, ale je-li $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$, tedy f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé.

Věta 1.10 *Nechť jsou $y_1, ..., y_n$ řešením rovnice 1.11 na intervalu J, pak pro $x, x_0 \in J$ platí*

$$\frac{d}{dx}(W(y_1, ..., y_n)(x)) = -a_{n-1}(x)W(y_x, ..., y_n)(x),$$

tedy

$$W(y_1, ..., y_n)(x) = W(y_1, ..., y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}. \tag{1.12}$$

Důkaz
Podívejme se nejdříve na případ pro $n = 2$, pak $W(y_1, y_2)(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$, tedy

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(W(y_1, y_2)(x)) &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' \\
&= (y_1'y_2' - y_1'y_2') + (y_1y_2'' - y_1''y_2) \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Označme $dW_n = \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2, ..., y_n)(x))$. Obdobně jeko v dvoudimenzionálním případě lze ukázat, že

$$\begin{aligned}
dW_n &= \det\begin{pmatrix} y_1' & ... & y_n' \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + ... \\
&+ \det\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z faktu, ze v prvních $n - 1$ determinantech jsou vždy dva řádky stejné, a tak jsou tyto determinanty nulové. Jelikož y_i pro $i = 1, ..., n$ je řešením rovnice 1.11, tak dosadíme-li $y_i^{(n)} = -a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - a_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - ... - a_0(x)y_i$ do předchozímo výrazu, dostaneme

$$dW_n = \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ -a_{n-1}y_1^{(n-1)} - ... - a_0y_1 & ... & -a_{n-1}y_n^{(n-1)} - ... - a_0y_n \end{pmatrix}.$$

Použijem to, že vynásobíme-li nějaký řádem matice konstantou a, tak je determinant nové matice a krát větší, než determinant matice původní a také toho, že determinant matice, jejíž řádek je tvořen součtem vektorů lze rozložit na součet determinantů. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} dW_n =& - a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} - ... \\ & - a_{n-2}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} - ... \\ & - a_0(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1 & ... & y_n \end{pmatrix} - ... \\ =& - a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(y_1, ..., y_n)(x). \end{aligned}$$

Jelikož právě dokázaná rovnost je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými (jde o diferenciální rovnici, kde neznámá funkce je funkce wronskiánu, tedy pro každé x vrací hodnotu wronskiánu v tomto bodě), tak druhý vztah je jejím přímým důsledkem. □

Metoda nalezení druhého řešení za pomocí Wronskiánu

Uvažujme rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.13}$$

a nechť y_1 je jedno netriviální známé řešení této rovnice. Pak pro libovolné řešení y této rovnice platí

$$W(y_1, y)(x) = y_1 y' - y_1' y = W(y_1, y)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Zvolíme nyní $W(y_1, y)(x_0) = 1$.[6] Dostaneme tedy rovnici

$$y_1 y' - y_1' y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{1.14}$$

Je-li y řešením rovnice 1.13, pak musí jít o řešení, které je nezávislé s řešením y_1, jelikož wronskián $W(y_1, y)(x) \neq 0$.

Je-li naopak y řešením rovnice 1.14, pak

$$\begin{aligned}
y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \\
(y_1 y' - y_1' y)' &= p(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1' y' + y_1 y'' - y_1'' y - y_1' y' &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' - y_1'' y &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' - (-p(x) y_1' - q(x) y_1) y &= -p(x)\left(y_1 y' - y_1' y\right) \\
y_1 y'' + q(x) y_1 y &= -p(x) y_1 y' \\
y_1 (y'' + p(x) y' + q(x) y) &= 0.
\end{aligned}$$

Tedy y je řešením rovnice 1.13. Dále upravama rovnice 1.14 dostanem

$$\begin{aligned}
y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \\
\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} &= \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} \\
\left(\frac{y}{y_1}\right)' &= \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} \\
\frac{y}{y_1} &= \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2(x)} dx \\
y &= y_1 \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2(x)} dx.
\end{aligned}$$

Tedy jsme našli vzorec pro určení druhého řešení rovnice 1.13, které je lineárně nezávislé s řešením y_1.

[6] Jelikož je y řešením lineární homogenní diferenciální rovnice, tak i cy je řešením této rovnice, takže volbou Wronskiánu v bodě x_0 měníme y maximálně o multiplikativní konstantu.

Příklad 1.11 *Najděme obecné řešení rovnice* $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$, *víme-li, že má tato rovnice jedno řešení* $y_1(x) = x^2$.

Řešení:

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^4} = \frac{e^{-\ln x}}{x^4} = \frac{1}{x^5}$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4}$$
$$y = -\frac{1}{4x^2}.$$

Druhé řešení této rovnice je tedy $y_2 = \frac{1}{x^2}$ *a obecné řešení je ve tvaru*

$$y(x) = c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme, že známe jedno nenulové řešení y_1 homogenní rovnice 1.11. Hledejme další řešení ve tvaru $y(x) = u(x)y_1(x)$, pak

$$y' = u'y_1 + uy_1'$$
$$y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$
$$...$$
$$y^{(n)} = u^{(n)}y_1 + \binom{n}{1}u^{(n-1)}y_1' + ... + uy_1^{(n)}.$$

Po dosazení dostaneme rovnici

$$u^{(n)}y_1 + b_{n-1}(x)u^{(n-1)} + ... + b_1(x)u' +$$
$$+u\left(y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y\right) = 0,$$

kde funkce $b_i(x)$ jdou vyjádřit pomocí funkcí $a_j(x)$ a řešení $y_1(x)$. Vydělením předešlé rovnice řešením y_1 dostaneme rovnici

$$u^{(n)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}u^{(n-1)} + ... + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}u' = 0.$$

Použitím substituce $v(x) = u'(x)$ dostaneme lineární homogení rovnici $(n-1)$-ního řádu

$$v^{(n-1)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}v^{(n-2)} + ... + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}v = 0.$$

Příklad 1.12 *Vraťme se k předchozímu příkladu. Mějme rovnici* $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$*,* $x > 0$ *a jedno její řešení* $y_1(x) = x^2$*.*

Řešení: Užijeme substituci $y = uy_1$*, dosaďme do rovnice, pak použijeme substituci* $v = u'$ *a vyřešíme rovnici.*

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} &= 0 \\
u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + \frac{u'y_1 + uy_1'}{x} + \frac{-4uy_1}{x^2} &= 0 \\
u''x^2 + 4u'x + 2u + \frac{u'x^2 + 2ux}{x} + \frac{-4ux^2}{x^2} &= 0 \\
u''x^2 + 4u'x + u'x &= 0 \\
v'x^2 + 5vx &= 0 \\
v' &= \frac{-5v}{x} \\
\frac{v'}{v} &= \frac{-5}{x} \\
\ln|v| &= \ln|x^{-5}| \\
v &= x^{-5}.
\end{aligned}$$

Tedy $u = \int v dx = \frac{-1}{4x^4}$ *a proto* $y = uy_1 = \frac{-1}{4x^4}x^2 = \frac{-1}{4x^2}$*. Tedy fundamentální systém této rovnice je* $y_1 = x^2$ *a* $y_2 = \frac{1}{x^2}$*.*

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0, \tag{1.15}$$

kde $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pokusíme se najít řešení této rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, kde λ je nějaké číslo. Pak $y^{(n)}(n) = \lambda^n e^{\lambda x}$ a tedy po dosazení do rovnice 1.15 dostaneme

$$\begin{aligned}
y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y &= 0 \\
\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} &= 0 \\
\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Označme $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$, pak poslední rovnici lze napsat ve tvaru $P(\lambda) = 0$. Tedy najdeme-li kořen λ polynomu $P(\lambda)$, pak $y(x) = e^{\lambda x}$ bude řešením rovnice 1.15. Polynom $P(\lambda)$ se nazývá charakteristický polynom a rovnici $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ se říká charakteristická rovnice. Rovnice $P(\lambda) = 0$ má v komplexním oboru n kořenů [7] (některé ale mohou být stejné, pak hovoříme o vícenásobných kořenech). Pokud je ale kořen $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexní, pak je řešení $y(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$ také komplexní. Lze snadno ověřit, že reálná část tohoto řešení $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ i imaginární část $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)i$ jsou také řešením této rovnice.

Při určování řešení rovnice 1.15 pokračujeme následujícím způsobem.

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ jednonásobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak nám tento kořen dá jedno řešení ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$.

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ n-násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ $(n > 1)$, pak nám tento kořen dá n nezávislých řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda x}, ..., y_n(x) = x^{n-1}e^{\lambda x}$.

- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ jednonásobný komplexní kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá dvě nezávislá řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.[8]

- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ n-násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ $(n > 1)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá $2n$ nezávislých řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x}\sin(\beta x), & y_3(x) &= xe^{\alpha x}\sin(\beta x), ..., & y_{2n-1}(x) &= x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ y_2(x) &= e^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_4(x) &= xe^{\alpha x}\cos(\beta x), ..., & y_{2n}(x) &= x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x). \end{aligned}$$

Tímto způsobem získáme pro rovnici 1.15 n nezávislých řešení, které dohromady tvoří fundamentální systém rovnice 1.15.

Příklad 1.13 *Najděme obecné řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$.*

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0,$$

[7] Jde o přímý důsledek základní věty algebry, viz. přednáška v druhém semestru.

[8] Je třeba si uvědomit, že je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexním kořenech charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak i $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ je kořenem této rovnice, jelikož $P(\lambda)$ je polynom s reálnými koeficienty (viz. přednáška v druhém semestru). Tento druhý kořen nám ale dá stejnou dvojici řešení, jako kořen λ.

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Z toho dostaneme dvě nezávislá řešení $y_1(x) = e^{2x}$ a $y_2(x) = e^{-3x}$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Příklad 1.14 *Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 13y = 0$.*

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

tedy kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Dostaneme tedy dvě nazávislá řešení $y_1(x) = e^{2x}\sin(3x)$ a $y_2(x) = e^{2x}\cos(3x)$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x}\sin(3x) + c_2 e^{2x}\cos(3x).$$

Příklad 1.15 *Najděme obecné řešení rovnice $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.*

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)^2 = 0,$$

tedy dostaneme jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = -1$ a jeden trojnásobný kořen $\lambda_2 = 0$ Z toho dostáváme pět nezávislých řešení

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}, y_3(x) = 1, y_4(x) = x, y_5(x) = x^2.$$

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2.$$

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty, variace konstant

Uvažujem rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{1.16}$$

kde $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Tak jako u lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu platí, že je-li $y_p(x)$ nějaké (partikulární) řešení nehomogenní rovnice 1.16 a $y_h(x)$ je řešením příslušné homogenní rovnice 1.15, pak i $y(x) = y_p(x) + cy_h(x), c \in \mathbb{R}$ je řešením nehomogenní rovnice 1.16. Stejně jako u rovnic prvního řádu bude tedy k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice stačit nalézt jedno (partikulární) řešení této rovnice a pak k němu přičíst obecné řešení příslušné homogenní rovnice 1.15. K nalezení partikulárního řešení použijeme variaci konstant. Nechť je $y_1, ..., y_n$ fundamentální systém příslušné homogenní rovnice, pak budeme partikuární řešení hledat ve tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n(x) y_n(x).$$

Odvození si ukážeme na rovnici druhého řádu. Uvažujme rovnici

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

a y_1, y_2 jsou dvě nazávislá řešení rovnice $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$. Tedy $y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Abychom při výpočtu druhé derivace nedostali i druhé derivace funkcí c_1 a c_2, přidáme podmínku

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

tedy

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \\ y'' &= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''. \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice a dostáváme

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Pro funkce c_1' a c_2' dostaneme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Uvědomme si, že determinant matice této soustavy je nenulový, jelikož je to wronskián $W(y_1, y_2)(x)$ a y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení homogenní rovnice. Tedy tato soustava má jedno řešení. Z této soustavy určíme funkce c_1' a c_2' a pak integrací i funkce c_1 a c_2.

Příklad 1.16 *Najděme obecné řešení rovnice* $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na příslušnou homogenní rovnici $y'' + 4y' + 3y = 0$. *Dostaneme charakteristickou rovnici* $\lambda^2 + 4\lambda_3 = (\lambda+3)(\lambda+1) = 0$, *tedy řešení homogenní rovnice v obecném tvaru je*

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Dále hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x)e^{-3x} + c_2(x)e^{-x}$. *Dostaneme*

$$y' = c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} - 3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}.$$

Přidáme podmínku $c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} = 0$ *a dostáváme*

$$\begin{aligned} y' &= -3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x} \\ y'' &= -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 3y &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 4(-3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}) + 3(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}) &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} &= 0 \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Tedy $c_1' = -\frac{1}{2}$, $c_2' = \frac{1}{2}e^{-2x}$ *a* $c_1 = -\frac{x}{2}$ *a* $c_2 = -\frac{1}{4}e^{-2x}$, *proto má partikulární řešení tvar* $y_p(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} = e^{-3x}(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$ *a obecné řešení*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -\frac{x}{2}e^{-3x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Rovnice se speciální pravou stranou

Předpokládejme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{1.17}$$

kde $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a funkce f je ve tvaru $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n a m. Probereme nejdříve jednodušší varianty pravé strany.

1. Nechť $f(x) = P_m(x)$ je polynom stupně m a 0 je k-násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.17 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m.

Příklad 1.17 *Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y = x$.*

Řešení:

I. *Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 4y = 0$.*

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 0 \\ \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2 \\ y_h(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

II. *Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 4y = x$. Hledáme ho ve tvaru $y(x) = ax + b$.*

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y'' &= 0 \\ y'' - 4y &= x \\ -4(ax + b) &= x \\ y_p(x) &= -\frac{1}{4}x. \end{aligned}$$

III. *Obecné řešení je ve tvaru*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{4}x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}.$$

Příklad 1.18 *Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = 4x$.*

Řešení:

I. *Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 2y' = 0$.*

$$\begin{aligned} y'' - 2y' &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda = (\lambda - 2)\lambda &= 0 \\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 &= 2 \\ y_h(x) &= C_1 + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

II. *Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice* $y'' - 2y = 4x$. *Hledáme řešení ve tvaru* $y(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx \\ y' &= 2ax + b \\ y'' &= 2a \\ y'' - 2y' &= 4x \\ 2a - 2(2ax+b) &= 4x \\ a = -1,\ b &= -1 \\ y_p(x) &= -x^2 - x. \end{aligned}$$

III. *Obecné řešení je ve tvaru*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -x^2 - x + C_1 + C_2 e^{2x}.$$

2. Nechť $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m, a $\alpha \in \mathbb{R}$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.17 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k e^{\alpha x}$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m.

Příklad 1.19 *Najděte obecné řešení rovnice* $y'' - 2y' = e^{2x}$.

Řešení:

I. *Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice* $y'' - 2y' = 0$, *což je* $y_h(x) = C_1 + C_2e^{2x}$. *(viz. předchozí příklad)*

II. *Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice* $y'' - 2y = e^{2x}$. *Hledáme řešení ve tvaru* $y(x) = axe^{2x}$.

$$\begin{aligned} y &= axe^{2x} \\ y' &= ae^{2x}(1+2x) \\ y'' &= 4ae^{2x}(1+x) \\ y'' - 2y' &= e^{2x} \\ 4ae^{2x}(1+x) - 2ae^{2x}(1+2x) &= e^{2x} \\ 2a &= 1 \\ y_h(x) &= \frac{1}{2}xe^{2x}. \end{aligned}$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x}{2}e^{2x} + C_1 + C_2e^{2x}.$$

3. Nechť $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x))$, kde $P_m(x)$ a $Q_l(x)$ je polynom stupně m resp. l, a $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.17 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = x^k e^{\alpha x}(\hat{P}_s(x)\cos(\beta x) + \hat{Q}_s(x)\sin(\beta x))$, kde $\hat{P}_s(x)$ a $\hat{Q}_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně $s = \max\{m, l\}$.

Poznámka 1.5 *I když je na pravé straně jen kosinus (nebo jen sinus), tak je třeba hledat řešení ve tvaru jak se sinem tak i kosinem. Všimněme si, že tento poslední případ v sobě obsahuje oba předešlé případy. Pro $\alpha = \beta = 0$ dostaneme první případ, pro nenulové α a $\beta = 0$ dostáváme druhý případ.*

Příklad 1.20 *Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = e^x \sin(2x)$.*
Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 4y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2i \\ y_h(x) &= C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x). \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' + 4y = e^x\sin(2x)$. Jelikož $1 + 2i$ není kořenem charakteristického polynomu, hledáme řešení ve tvaru $y(x) = e^x(a\sin(2x) + b\cos(2x))$

$$\begin{aligned} y &= e^x(a\sin(2x) + b\cos(2x)) \\ y' &= e^x(a\sin(2x) + 2a\cos(2x) + b\cos(2x) - 2b\sin(2x)) \\ &= e^x((a - 2b)\sin(2x) + (2a + b)\cos(2x)) \\ y'' &= e^x((a - 2b - 4a - 2b)\sin(2x) + (2a + b + 2a - 4b)\cos(2x)) \\ &= e^x((-3a - 4b)\sin(2x) + (4a - 3b)\cos(2x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= e^x \sin(2x) \\
e^x((-3a - 4b + 4a)\sin(2x) + (4a - 3b + 4b)\cos(2x)) &= e^x \sin(2x) \\
a - 4b &= 1 \\
4a + b &= 0 \\
a &= \frac{1}{17} \\
b &= \frac{-4}{17}
\end{aligned}$$

$$y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{17}\sin(2x) - \frac{4}{17}\cos(2x) \right)$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = e^x \left(\frac{1}{17}\sin(2x) - \frac{4}{17}\cos(2x) \right) + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

Kapitola 2

Nekonečné číselné řady

Opakování

Definice 2.1 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *nazveme* n*-tý částečný součet řady a* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost částečných součtů.*

Existuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n = s$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a má součet* s*.*

Neexistuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Divergentní řady dále dělíme na tři případy:*

- *Je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $+\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*,*
- *je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $-\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$*,*
- *jestliže* $lim_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje, řekneme, že řada osciluje.*

Definice 2.2 *Řada se nazývá omezená, je-li posloupnost* $\{s_n\}$ *omezená.*

Věta 2.1 *Konvergentní řada je omezená.*

Věta 2.2 *(nutná podmínka konvergence) Je-li* $\sum a_n$ *konvergentní, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Poznámka 2.1 *Na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.*

2.1 Řady s nezápornými členy

Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.

Věta 2.3 *Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.*

2.1.1 Kritéria konvergence

Věta 2.4 *(srovnávací kritérium) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:*

- *Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_i$, tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- *Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Věta 2.5 *(limitní srovnávací kritérium) Nechť $a_n \geq 0$ a $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.*

Věta 2.6 *(Odmocninové kritérium - Cauchyho) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq 0$.*

a)
  i) Jestliže existuje $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konerguje.
  ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

b) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:
  i) Je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
  ii) Je-li $q > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 2.7 *(Podílové kritérium - d'Alembertovo) Nechť $a_n \geq 0$.*

i) Jeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

ii) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak:
  - *je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

– *je-li* $q > 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta 2.8 *(Raabeovo kritérium) Nechť* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz

i) Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a n_0 takové, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &> 1 + \varepsilon, \\ n(a_n - a_{n+1}) &> a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}, \\ na_n - (n+1)a_{n+1} &> \varepsilon a_{n+1}, \\ \frac{1}{\varepsilon}(na_n - (n+1)a_{n+1}) &> a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n_0} a_i + \sum_{n_0+1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n_0} a_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} \left(\frac{1}{\varepsilon}((i-1)a_{i-1} - ia_i)\right) \\ &= s_{n_0} + \frac{1}{\varepsilon}(n_0 \cdot a_{n_0} - (n_0+1)a_{n_0+1} + (n_0+1)a_{n_0+1} - \ldots + (n-1)a_{n-1} - na_n) \\ &= s_{n_0} + \frac{1}{\varepsilon}(n_0 \cdot a_{n_0} - na_n) \leq s_{n_0} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot n_0 \cdot a_{n_0}. \end{aligned}$$

Jelikož posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a omezená, je také konvergentní. Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ pro všechna $n > n_0$. Pak

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &< 1 \\ na_n - na_{n+1} &< a_{n+1} \\ na_n &< (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Dostáváme $(n_0+1)a_{n_0+1} < (n_0+2)a_{n_0+2} < \ldots < na_n$ a tedy $a_n > \frac{1}{n}(n_0+1)a_{n_0+1}$. Proto

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i > \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{1}{i}(n_0+1)a_{n_0+1} = (n_0+1)a_{n_0+1} \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Z divergence harmonické řady a věty 2.4 plyne divergence řady $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ a tedy i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Příklad 2.1 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)}} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{a}{n+1} = a.$$

Je-li tedy $a > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pro $a \in (0,1)$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pro $a = 1$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, což je harmonická řada bez prvního členu a tedy řada divergentní.

Poznamenejme, že v této úloze by nám nepomohlo d'Alembertovo kritérium, jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Příklad 2.2 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{(n+1)^k}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^k-n^k}{n^k}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{1-k}\left(e^{k\ln(n+1)}-e^{k\ln n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{1-k}\cdot e^{k\ln n}\left(e^{k(\ln(n+1)-\ln n)}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{e^{k(\ln(1+\frac{1}{n}))}-1}{k(\ln(1+\frac{1}{n}))}\cdot\frac{k(\ln(1+\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} = k.$$

Tedy pro $k>1$ řada konverguje a pro $k<1$ řada diverguje.

Věta 2.9 *(Integrální kritérium) Nechť je funkce f nerostoucí, nezáporná a definovaná na intervalu $[1,\infty)$. Pokud $a_n = f(n)\ \forall n\in\mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_1^\infty f(x)dx<\infty$.*

Důkaz

f je nerostoucí, tedy $f(n-1)\geq f(x)\geq f(n)\ \forall x\in[n-1,n]$. Dále dostaneme

$$\begin{aligned}
f(n-1) = \int_{n-1}^{n} f(n-1)dx \geq \int_{n-1}^{n} f(x)dx &\geq \int_{n-1}^{n} f(n)dx = f(n)\\
\sum_{n=2}^{k} f(n-1) \geq \sum_{n=2}^{k}\int_{n-1}^{n} f(x)dx &\geq \sum_{n=2}^{k} f(n)\\
\sum_{n=1}^{k} f(n) \geq \int_{1}^{k} f(x)dx &\geq \sum_{n=2}^{k} f(n)\\
\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} f(n) \geq \lim_{k\to\infty}\int_{1}^{k} f(x)dx &\geq \lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k} f(n)\\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_{1}^{\infty} f(x)dx &\geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.
\end{aligned}$$

Z první nerovnosti dostaneme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$ (konvergnentní) $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx<\infty$. Z druhé nerovnosti dostaneme: $\int_1^\infty f(x)dx<\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n<\infty$ a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\square$

Příklad 2.3 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

kde $k \neq 1$.

Řešení: Zavedeme funkci $f(x) = \frac{1}{x^k}$, *pak funkce* f *splňuje pro* $k > 0$ *podmínky věty 2.9. Dostaneme*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x^{-k}dx = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}$$

tedy $\int_1^{\infty} f(x)dx = -\frac{1}{1-k}$ *pro* $k > 1$ *a* $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ *pro* $k \in (0,1)$.

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ *diverguje pro* $k = 1$ *(jde o harmonickou řadu) a pro* $k \leq 0$ *je* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^k} \neq 0$[1], *tak dostáváme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ *konverguje pro* $k > 1$ *a diverguje pro* $k \leq 1$.

2.2 Řady s obecnými členy

Definice 2.3 *Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, ale řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverguje, říkáme že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně.*

Věta 2.10 *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergentní, tak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 2.11 *(Leibnitzovo kritérium) Nechť pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí:*

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konverguje.*

Věta 2.12 *(Bolzano-Cauchyova podmínka) Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_n| = |\sum_{i=1}^{p} a_{n+i}| < \varepsilon$.

[1] neni splněna nutná podmínka konvergence viz. věta 2.2

Důkaz Jde o přímý důsledek definice a Bolzano-Cauchyho věty pro posloupnosti. □

Lemma 2.13 *Mějme posloupnopsti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *a čísla* $n, p \in \mathbb{N}$, $n < p$. *Označme* $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. *Pak*

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k (a_k - a_{k+1}) + \beta_p a_{p+1} - \beta_n a_{n+1}. \tag{2.1}$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{p} a_k(\beta_k - \beta_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} \beta_k = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \left(a_{n+1}\beta_n - a_{p+1}\beta_p + \sum_{k=n+1}^{p} a_{k+1}\beta_k \right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n.
\end{aligned}$$

□

Věta 2.14 *(Abelovo-Dirichletovo kritérium) Nechť* $\{a_n\}$ *je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

1. *(Dirichlet)* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *má omezené částečné součty.*
2. *(Abel) Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní a posloupnost* $\{a_n\}$ *je omezená.*

Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

Důkaz

1. Použijeme B-C podmínku (věta 2.12) a předchozí lemma. Stejně jako v přechozím lemmatu používáme značení $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Jelikož má řada $\sum b_n$ omezené částečné součty, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|\beta_k| < M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

BÚNO předpokládáme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} |\beta_k(a_k - a_{k+1})| + |a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n| \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} |\beta_k|(a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} M(a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1}\beta_p| + |a_{n+1}\beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} M(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}M + a_{n+1}M \\
&= M(a_{n+1} - a_{p+1} + a_{p+1} + a_{n+1}) = 2Ma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Tedy pro $n_0 < n < p$ platí:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| < 2M\varepsilon,$$

a proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní (dle věty 2.12).

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, označme tedy její součet $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z rovnosti $\sum_{k=n+1}^{p}(a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{p+1}$ dostaneme rovnost

$$0 = \sum_{k=n+1}^{p} \beta(a_k - a_{k+1}) + \beta a_{p+1} - \beta a_{n+1}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{p} (\beta_k - \beta)(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)| \\
&\leq \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta|.
\end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, tak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\beta - \beta_k| < \varepsilon$ pro všechna $k > n_0$. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|a_n| < M$. Tedy pro $n, p > n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &\leq \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta| \\
&< \left|\sum_{k=n+1}^{p} \varepsilon(a_k - a_{k+1})\right| + \varepsilon|a_{p+1}| + \varepsilon|a_{n+1}| \\
&\leq \varepsilon(|a_{n+1} - a_{p+1}| + |a_{p+1}| + |a_{n+1}|) \leq 2\varepsilon(|a_{p+1}| + |a_{n+1}|) < 4\varepsilon M.
\end{aligned}$$

Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (dle věty 2.12).

□

Příklad 2.4 *Ukážeme, že má řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$ omezené částečné součty.*

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n} Im(e^{ik}) = Im \sum_{k=0}^{n} e^{ik} = Im \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}\right| \\
&\leq \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1 - e^i|} \leq \frac{2}{|1 - e^i|}.
\end{aligned}$$

Není ukažme, že řada $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ konverguje.

Stačí aplikovat Dirichletovo kritérium. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $\sum \sin(n)$ má omezené částečné součty.

2.2.1 Přerovnávání řad

Definice 2.4 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ ($\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, ža $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Věta 2.15 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním této řady a jejich součet je stejný (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$).*

Důkaz

Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_p| < \varepsilon$ pro každé $p > n \geq n_0$ (viz. věta 2.12). Jelikož $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$, tak existuje $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1, 2, ..., n_0\} \subset \{k_1, k_2, ..., k_{\hat{n}_0}\}$. Je-li $\hat{p} > \hat{n} > \hat{n}_0$ a označme $p = \max\{k_{\hat{n}}, k_{\hat{n}+1}, ..., k_{\hat{p}}\}$, pak $|a_{k_{\hat{n}}}| + |a_{k_{\hat{n}}+1}| + ... + |a_{k_{\hat{p}}}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + ... + |a_p| < \varepsilon$, tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konvergentní.

Nyní dokážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$. Nechť $n > \max\{n_0, \hat{n}_0\}$a označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{k_i}$. pak

$$\begin{aligned} |s_n - \hat{s}_n| &= |a_1 + a_2 + ... + a_n - (a_{k_1} + a_{k_2} + ... + a_{k_n})| \\ &\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + ... + |a_q| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $q = \max\{n, k_1, ..., k_n\}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} |s_n - \hat{s}_n| = 0$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

□

Označme $a^+ = \max\{0, a\}$ a $a^- = \max\{0, -a\}$. Pak $a = a^+ - a^-$ a $|a| = a^+ + a^-$. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečné řada, tak můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Lemma 2.16 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.*

Důkaz

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jsou řady s nezápornými koeficienty, tak každá z těchto řed buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.

Kdyby obě konvergovaly, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$ a tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně.

Pokud by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergovala k $+\infty$, pak by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} s_n^+ = A \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim_{n\to\infty} s_n^- = +\infty$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K \in \mathbb{R}$ by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $A - \varepsilon < s_n^+ < A + \varepsilon$ a $s_n^- > K$ $\forall n > n_0$. Tedy

$$s_n = s_n^+ - s_n^- < A - K + \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Proto by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_n^+ - s_n^-) = -\infty.$$

Tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala. Stejně by se ukázalo, že pro konvergentní řadu nemůže nastat aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergovala k $+\infty$ a 5ada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergovala.

Proto obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.

□

Věta 2.17 *(Riemannova) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$ a takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ osciluje.*

Důkaz

- Nechť je $s \in \mathbb{R}$. Označme n_1 nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ > s$ (jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, tak takové n_1 existuje). Označme m_1 nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_1} a_i^- < s$. Dále pro $k = 2, 3, \dots$ označme n_k nejmenší $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} a_i^- > s$ a m_k nejmenší $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_k^+ - \sum_{i=1}^{m_k} < s$. Tato konstrukce nám vytvoří řadu

$$a_1^+ + + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - (a_{m_1+1}^- + \dots) + \dots,$$

  která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označme $\hat{s}_n$ součet takto přerovnané řady, pak částečný součet $\hat{s}_{n_1+m_1+\dots+n_k}$ se od s liší maximálně o $a_{n_k}^+$ a částečný součet $s_{n_1+m_1+\dots+m_k}$ se od s liší maximálně o $a_{m_k}^-$. Podobně částečný součet $\hat{s}_n$, kde $n_1 + m_1 + \dots + n_k < n < n_1 + m_1 + \dots + m_k$ se od s liší maximálně o $\max\{a_{n_k}^+, a_{m_k}^-\}$ a obdobně pro $n_1 + m_1 + \dots + m_k < n < n_1 + m_1 + \dots + n_{k+1}$ je $|s_n - s| \le \max\{a_{n_{k+1}}^+, a_{m_k}^-\}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a proto je $\lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = s$.

- Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$. Stačí třeba zvolit následující přerovnání. $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší n_1 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ > 1$. $n_2 > n_1$ je nejmenší n_2 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ > 2$, $n_3 > n_2$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - a_2^- + a_{n_2+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ > 3$ a tak dál. Dále postupujeme jak v předchozí části důkazu.

- Pro přerovnávání do oscilující řady stačí, aby n_1 bylo nejmenší takové, že $a_1^+ + ... + a_{n_1}^+ > 1$, m_1 nejmenší takové, že $a_1^+ + ... + a_{n_1}^+ - (a_1^- + ... + a_{m_1}^-) < -1$, $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a_1^+ + ... + a_{n_1}^+ - (a_1^- + ... + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + ... + a_{n_2}^2 > 1$ a tak dále.

$\square$