Důležité řady

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $|q| < 1$ a diverguje pro $|q| \geq 1$.

Kritéria konvergence

I. Řady s nezápornými členy ($a_n \geq 0$):

- (srovnávací kritérium) $a_n \leq b_n \Rightarrow (\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje).
- (srovnávací kritérium) $a_n \leq b_n \Rightarrow (\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje).
- (limitní srovnávací kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty) \Rightarrow (\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje).
- (podílové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (podílové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (odmocninové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (odmocninové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (Raabeovo kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (Raabeovo kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (Integrální kritérium) $f(x)$ je nerostoucí a nezáporná na $(1, \infty)$, $a_n = f(n)$, pak $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.

II. Řady s obecnými členy:

- (nutná podmínka konvergence) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (Leibnizovo kritérium) Nechť platí:
  I. $a_n \geq 0$,
  II. $a_n \geq a_{n+1}$,
  III. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak řada $\sum(-1)^n a_n$ konverguje.
- (Abel - Dirichlet) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní, pak:
  (Abel) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum b_n$ je konvergentní $\Rightarrow \sum(a_n \cdot b_n)$ konverguje.
  (Dirichlet) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\sum b_n$ má omezené částečné součty $\Rightarrow \sum(a_n \cdot b_n)$ konverguje.

Opakování

1. Vyšetřete konvergenci řad:

a) $\displaystyle\sum \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+3}$

b) $\displaystyle\sum (\sqrt{n^2-n-1} - \sqrt{n^2-n+1})$

c) $\displaystyle\sum (-1)^n (3^{\frac{1}{n}} - 1)$

d) $\displaystyle\sum \frac{\sin(\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})}{n + \sqrt{n} + \ln n}$

e) $\displaystyle\sum \frac{\sin(2n+3)}{\sqrt{2n^3+3n^2} - \sqrt{n^3+2n^2}}$

f) $\displaystyle\sum (-1)^n \sqrt{\frac{2n}{n^2+n}}$

g) $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$

h) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n(4n-(-1)^n)^n}$

i) $\displaystyle\sum \frac{\sin(\frac{\pi}{n^2})}{\sqrt{2n+3}}$

j) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln 2n}{\sqrt{n+2}}$

k) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$

l) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+n} - n)$

m) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

n) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

o) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{\ln n + (-1)^n}$

p) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{3^n}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}$

2. Vyšetřete konvergenci řad:

a) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

b) $\sum (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$

c) $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$

d) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$

e) $\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+2} - n)$

f) $\sum (-1)^n \ln(1 - \frac{2}{n^2})$

g) $\sum \frac{\sqrt[n]{n} \sin n}{n}$

h) $\sum (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$

i) $\sum \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

j) $\sum (-1)^n \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin n$

k) $\sum (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$

l) $\sum \frac{\ln^a n}{n^b} \operatorname{arccotg}^c(n)$

m) $\sum (-1)^n \frac{\sinh(nx) + \cosh(nx)}{e^{2nx}}$

Řešení

1. a) $\sum \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+3}$

   b) $\sum (\sqrt{n^2-n-1} - \sqrt{n^2-n+1})$

   c) $\sum (-1)^n (3^{\frac{1}{n}} - 1)$

   d) $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})}{n + \sqrt{n} + \ln n}$

   e) $\sum \frac{\sin(2n+3)}{\sqrt{2n^3+3n^2} - \sqrt{n^3+2n^2}}$

   f) $\sum (-1)^n \sqrt{\frac{2n}{n^2+n}}$

   g) $\sum \frac{n!}{n^n}$

   h) $\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n(4n-(-1)^n)^n}$

   i) $\sum \frac{\sin(\frac{\pi}{n^2})}{\sqrt{2n+3}}$

   j) $\sum (-1)^n \frac{\ln 2n}{\sqrt{n+2}}$

   k) $\sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$

   l) $\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+n} - n)$

   m) $\sum (-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

   n) $\sum \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

   Absolutní konvergence - Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}}{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n+1})}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} = \infty > 1,$$

   tedy řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$ konverguje absolutně.

   o) $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln n + (-1)^n}$

   p) $\sum (-1)^n \frac{3^n}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}$

   Absolutní konvergence - Odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \frac{3}{e^2} < 1,$$

   tedy řada $\sum (-1)^n \frac{3^n}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}$ konverguje absolutně.

2. a) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

   Absolutní konvergence: $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ $(\forall n > e)$, tedy řada nekonverguje absolutně.
   Relativní konvergence - Leibnizovo krit.:

I. $\frac{\ln n}{n} \geq 0$,

II.

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)' = \frac{1-\ln n}{n^2} < 0,$$

pro $n > e$, tedy $a_n > a_{n+1}$ pro $n > e$,

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Tedy řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ konverguje relativně.

b) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$

Absolutní konvergence - Integrální krit.: $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = |z = lnx| = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{z} dz = [\ln z]_{\ln 2}^\infty = \infty$, tedy řada nekonverguje absolutně.

Relativní konvergence - Leibnizovo krit.:

I. $\frac{1}{n \ln n} \geq 0$ pro $n > 1$,

II.

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1},$$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$.

Tedy řada $\sum (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ konverguje relativně.

c) $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$

Absolutní konvergence - Integrální krit.: $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx = |z = lnx| = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{z^2} dz = [-\frac{1}{z}]_{\ln 2}^\infty = \frac{1}{\ln 2} < \infty$, tedy řada $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje absolutně.

d) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$

Absolutní konvergence: $\frac{1}{\ln(n+(-1)^n)} > \frac{1}{n}$, tedy řada nekonverguje absolutně.

Relativní konvergence:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} &= \frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(4)} + \frac{1}{\ln(7)} - \frac{1}{\ln(6)} + \ldots \\ &= -\frac{\ln(3)-\ln(2)}{\ln(3)\ln(2)} - \frac{\ln(5)-\ln(4)}{\ln(5)\ln(4)} - \frac{\ln(7)-\ln(6)}{\ln(7)\ln(6)} - \\ &= -\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n)}.\end{aligned}$$

Řadu $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n)}$ srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ (viz cv. c)).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n)}}{\frac{1}{n\ln^2 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln^2 n}{\ln(2n+1)\ln(2n)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{\ln^2 n}{\ln(2n+1)\ln(2n)} = \frac{1}{2}.$$

Tedy řada $-\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n)}$ konverguje. Jelikož jsme ukázali pouze konvergenci s_{2n}, jelikož jsme sečetli vždy lichý a následující sudý člen řady dohromady. Tak je třeba ještě ověřit nutnou podmínku konvergence, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} = 0$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Z konvergence limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ a NPK tedy již plyne konvergence řady $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$. Tato konvergence je relativní.

e) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+2} - n)$

Absolutní konvergence: Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+2}-n)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right)}{n\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n} = 1 \in (0,\infty),$$

tedy řada $\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+2} - n)$ konverguje absolutně.

f) $\sum(-1)^n \ln(1-\frac{2}{n^2})$
Absolutní konvergence: Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(1-\frac{2}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-\frac{2}{n^2})}{\frac{-2}{n^2}} = 2 \in (0,\infty),$$

tedy řada $\sum(-1)^n \ln(1-\frac{2}{n^2})$ konverguje absolutně.

g) $\sum \frac{\sqrt[n]{n}\sin n}{n}$
Absolutní konvergence: Využijeme faktu, že $\sin(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, $\frac{\pi}{2} > 1$ a $|\sin(x)|$ je π-periodická funkce, tedy pro každé n platí, že alespoň jeden z členů $|\sin(n)|, |\sin(n+1)|, |\sin(n+2)|$ je větší než $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}\sum \frac{\sqrt[n]{n}|\sin n|}{n} &> \sum \frac{|\sin n|}{n} = \frac{|\sin(1)|}{1} + \frac{|\sin(2)|}{2} + \frac{|\sin(3)|}{3} + \frac{|\sin(4)|}{4} + \frac{|\sin(5)|}{5} + \frac{|\sin(6)|}{6} + \dots \\ &> \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} = \infty,\end{aligned}$$

tedy řada nekonverguje absolutně.

h) $\sum(-1)^n \frac{n\sin n}{n^2+1}$
Konvergence - Dirichlet: Nejdříve ukážeme, že má řada $\sum(-1)^n \sin n$ omezené částečné součty.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \sin k = -\sum_{k=1}^{2n}\sin k + 2\sum_{k=1}^{n}\sin(2k).$$

Jelikož mají řady $\sum_{k=1}^{\infty}\sin k$ i $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k)$ omezené částečné součty, tak má omezené částečné součty i řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin k$. Jelikož

$$\begin{aligned}\frac{n}{n^2+1} &> \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\ n(n^2+2n+2) &> (n+1)(n^2+1) \\ n^2+n &> 1,\end{aligned}$$

tedy $\{\frac{n}{n^2+1}\}$ je klesající posloupnost. Navíc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$, tedy řada konverguje dle Dirichletova kritéria.
Absolutní konvergence: Řadu $\sum \frac{n|\sin n|}{n^2+1}$ srovnáme s řadou $\sum \frac{|\sin n|}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n|\sin n|}{n^2+1}}{\frac{|\sin n|}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 \in (0,\infty).$$

Že je řada $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ divergentní jsme ukázali v předchozím příkladu. Tedy diverguje i řada $\sum \frac{n|\sin n|}{n^2+1}$, a proto konverguje řada $\sum(-1)^n \frac{n\sin n}{n^2+1}$ relativně.

i) $\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
Konvergence - Raabeovo krit.:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1}{\frac{1}{n}} \overset{l.H.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(\ln(\frac{n}{n+1}) + n\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1-n}{(n+1)^2}\right)}{\frac{-1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{n}{n+1}) + \frac{1}{n+1}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{n}{n+1}) + \frac{1}{n+1}}{\frac{-1}{n^2}} \\ &\overset{l.H.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Tedy řada $\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ konverguje.

j) $\sum(-1)^n \ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\sin n$

Relativní konvergence - Dirichletovo kritérium:

Zaměřme se nejdříve na monotonii posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\}$. Pro sudé n dostaneme:

$$
\begin{aligned}
a_n &\overset{?}{<} a_{n+1}\\
(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) &\overset{?}{<} (-1)^{n+1}\ln\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\\
\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &\overset{?}{<} -\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\\
\frac{n-1}{n} &\overset{?}{<} \frac{n+1}{n+2}\\
n^2-2 &\overset{?}{<} n^2+1,
\end{aligned}
$$

tedy nerovnost $a_n < a_{n+1}$ platí. Pro n liché dostaneme:

$$
\begin{aligned}
a_n &\overset{?}{\leq} a_{n+1}\\
(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) &\overset{?}{\leq} (-1)^{n+1}\ln\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\\
-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\overset{?}{\leq} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
\frac{n}{n+1} &\overset{?}{\leq} \frac{n}{n+1},
\end{aligned}
$$

tedy platí nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$. Tedy dohromady platí $a_n \leq a_{n+1}$. Jelikož má $\sum \sin n$ omezené částečné součty a platí $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$, tak řada $\sum(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin n$ konveruje dle Dirichletova kritéria.

Absolutní konvergence: Srovnáme s divergentní řadou $\sum \frac{|\sin n|}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)|\sin n|}{\frac{|\sin n|}{n}} = 1 \in (0,\infty),$$

tedy řada $\sum(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin n$ konveruje relativně.

k) $\sum(-1)^n \dfrac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$

Nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n(\frac{1}{n}+1))}{\ln(n^3(\frac{1}{n^3}+1))} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)+\ln(\frac{1}{n}+1)}{\ln(n^3)+\ln(\frac{1}{n^3}+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln(\frac{1}{n}+1)}{\ln n}}{3+\frac{\ln(\frac{1}{n^3}+1)}{\ln n}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

tedy řada $\sum(-1)^n \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$ diverguje.

l) $\sum \dfrac{\ln^a n}{n^b}\operatorname{arccotg}^c(n)$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}(n)}{\frac{1}{n}} \overset{l.H.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1,$$

tedy $\operatorname{arccotg}(n)$ se chová v nekonečnu přibližně jako $\frac{1}{n}$. Srovnáme tuto řadu s řadou $\sum \frac{\ln^a n}{n^{b+c}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln^a n}{n^b}\operatorname{arccotg}^c(n)}{\frac{\ln^a n}{n^{b+c}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}^c(n)}{\frac{1}{n^c}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arccotg}(n)}{\frac{1}{n}}\right)^c = 1 \in (0,\infty).$$

Je-li $c+b>1$, pak řada $\sum \frac{\ln^a n}{n^{b+c}}$ konverguje. Pro $c+b<1$ řada diverguje. Je-li $c+d=1$, pak řada konverguje pro $a<-1$ a diverguje pro $a\geq 1$, jelikož

$$\int_2^\infty \frac{\ln^a x}{x} dx = |z=\ln x| = \int_{\ln 2}^\infty z^a dz = \left[\frac{z^{a+1}}{a+1}\right]_{\ln 2}^\infty .$$

Tedy předchozí integrál je konečný pro $a<-1$ a nekonečný pro $a\geq -1$ (pro $a=1$ se dostaneme k příkladu 2.b)).

m) $\sum (-1)^n \frac{\sinh(nx)+\cosh(nx)}{e^{2nx}}$

$$(-1)^n \frac{\sinh(nx)+\cosh(nx)}{e^{2nx}} = (-1)^n \frac{\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}+\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}}{e^{2nx}} = (-1)^n \frac{e^{nx}}{e^{2nx}} = (-1e^{-x})^n.$$

Jde tedy o geometrickou řadu s kvocientem $q=-e^{-x}$, tedy konverguje pro $x>0$ a diverguje pro $x\leq 0$.