Zadání

1. Vypočtěte derivace následujících funkcí:

   a) $f(x) = \sin(x^2)\cos(2x)$
   b) $f(x) = e^{\mathrm{tg}(3x-2)}$
   c) $f(x) = |\cos(\sqrt{3x+3})|$
   d) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x^3+2x}\right)$
   e) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x\cdot\sin x}{\cos x}\right)$
   f) $f(x) = \sqrt{\arcsin(x^2+3)}$

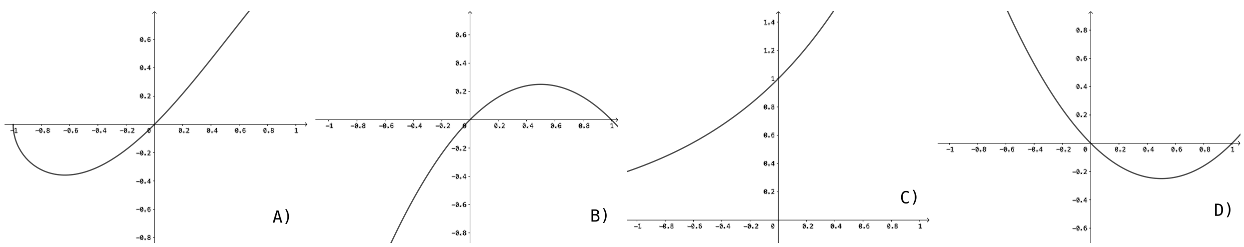
2. Vypočtěte první a druhou derivaci následujících funkcí a určete jejich hodnoty v bodě a:

   a) $f(x) = \sin(x)\cos(2x), \quad a = 0$
   b) $f(x) = e^{x^2+x}, \quad a = 1$
   c) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad a = 0$
   d) $f(x) = \sqrt{1+x}\sin x, \quad a = 0$

3. Určete, který z následujících grafů funkcí odpovídá hodnotám zadaných derivací v bodě $a = 0$.

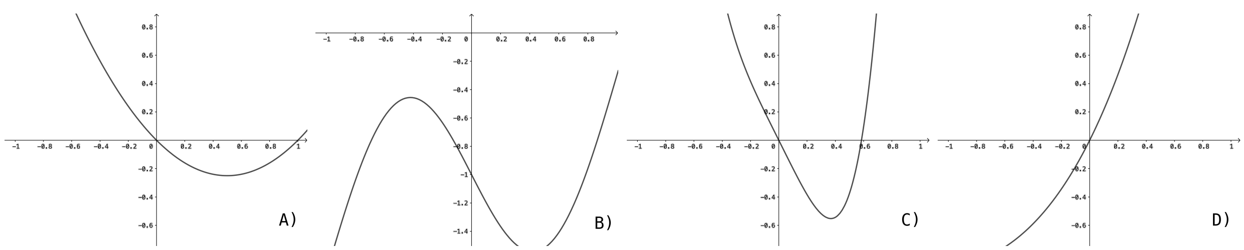
   a)

   $$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1$$



   b)

   $$f'(0) = -2, \quad f''(0) = 0$$



4. Určete rovnici tečny k funkci $f(x)$ v bodě $a = 0$.

   a) $f(x) = \sin x\sqrt{1+x}$
   b) $f(x) = e^x$
   c) $f(x) = -2\sin x\cos(2x) - 1$
   d) $f(x) = 10x^4 - 2x$

5. Najděte polynom druhého stupně, který nejlépe aproximuje funkci $f(x)$ v bodě $a = 0$, pokud víte, že $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ a $f''(0) = 1$.

6. Určete rovnici tečny k funkci $f(x)$ v bodě a, je-li

   a) $a = 1$, $f(a) = 1$ a $f'(a) = 2$
   b) $a = -1$, $f(a) = 0$ a $f'(a) = 1$
   c) $a = 2$, $f(a) = 3$ a $f'(a) = -7$
   d) $a = 1$, $f(a) = -2$ a $f'(a) = 3$

7. Určete Taylorův polynom n-tého stupně k funkci f v bodě a.

a) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, a = 0, n = 2$

b) $f(x) = e^{2x-x^2}, a = 0, n = 3$

c) $f(x) = \sqrt{1+x}\sin x, a = 0, n = 3$

d) $f(x) = 2 - \ln \frac{x^2+1}{x+1}, a = 0, n = 2$

8. S pomocí Taylorova polynomu určete následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x})\frac{1}{x}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \operatorname{arctg} x - x}{x(2e^x - e^{2x} - 1)}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

g) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

h) $\lim\limits_{x\to \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - e^{\sin x} - e^{\arcsin x}}{x^5}$.

9. S pomocí Taylorova polynomu určete se zadanou přesností hodnoty:

a) $e, \quad 10^{-3}$

b) $\sqrt{1+e}, \quad 10^{-3}$

e) $\sin 0,1, \quad 10^{-4}$

d) $\sin 33^\circ, \quad 10^{-6}$

e) $1,1^{1,2}, \quad 10^{-3}$

Řešení

1. a) $f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x\cdot\cos(2x) - \sin(x^2)\cdot\sin(2x)\cdot 2$
   b) $f'(x) = e^{\mathrm{tg}(3x-2)}\cdot\frac{3}{\cos^2(3x-2)}$
   c) $f'(x) = -\mathrm{sgn}(\cos(\sqrt{3\mathrm{x}+3}))\sin(\sqrt{3x+3}))\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x+3}}$
   d) $f'(x) = \frac{x^3+2x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x(x^3+2x)-(3x^2+2)\sin x}{(x^3+2x)^2} = \frac{\cos x(x^3+2x)-(3x^2+2)\sin x}{(x^3+2x)\sin x}$
   e) $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2\sin^2 x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{(\sin x+x\cos x)\cos x+\sin^2 x\cdot x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\cos x+x}{\cos^2 x\left(1+\frac{x^2\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}$
   f) $f'(x)$ neexistuje, jelikož $x^2+3\notin[-1,1]$.
2. a)
$$f'(x) = \cos x\cos(2x) - 2\sin x\sin(2x), \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x) = -(\sin x\cos(2x)+2\cos x\sin(2x)) - 2(\cos x\sin(2x)+2\sin x\cos(2x)), \qquad f''(0)=0$$
   b)
$$f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1), \qquad f'(1)=3e^2$$
$$f''(x) = e^{x^2+x}((2x+1)^2+2) = e^{x^2+x}(4x^2+4x+3), \qquad f''(1)=11e^2$$
   c)
$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \qquad f'(0)=\frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{(e^{3x}+2e^{2x}+e^x)-2(e^{3x}+e^{2x})}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x-e^{3x}}{(e^x+1)^4}, \qquad f''(0)=0$$
   d)
$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{1+x}} + \cos x\sqrt{1+x}, \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x) = \frac{2\cos x\sqrt{1+x}-\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}}{4(1+x)} - \sin x\sqrt{1+x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{\sin x}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \sin x\sqrt{1+x} + \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}, \qquad f''(0)=1$$
3. a) A, C
   b) B, C
4. a) $f(0)=0$ a $f'(0)=1$ (viz úloha 2.d). Tedy tečna je popsána rovnicí $y(x)=x$. Graf funkce $f(x)$ je na obrázku A) v úloze 3.a).
   b) $f(0)=1$ a $f'(0)=1$. Tedy tečna je popsána rovnicí $y=1+x$. Graf funkce $f(x)$ je na obrázku C) v úloze 3.a).
   c) $f(0)=-1$ a $f''(0)=-2$ (viz úloha 2.a). Tedy tečna je popsána rovnicí $y(x)=-1-2x$. Graf funkce $f(x)$ je na obrázku B) v úloze 3.b).
   d) $f(0)=0$ a $f''(0)=-2$. Tedy tečna je popsána rovnicí $y(x)=-2x$. Graf funkce $f(x)$ je na obrázku C) v úloze 3.b).
5. $p(x)=a+bx+cx^2$, tedy $p'(x)=b+2cx$ a $p''(x)=2c$.
$$1 = p(0) = a+b\cdot 0+c\cdot 0^2 = a \Rightarrow a=1$$
$$1 = p'(0) = b \Rightarrow b=1$$
$$1 = p''(0) = 2c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$
   Tedy $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$.

6. a) $y(x) = c_1 + c_2 x$, tedy

$$\begin{aligned} 1 &= y(1) = c_1 + c_2 \cdot 1 \\ 2 &= y'(1) = c_2 \end{aligned}$$

Dostaneme tedy $y(x) = -1 + 2x$.
Druhý způsob řešení je hledat tečnu ve tvaru $y(x) = d_1 + d_2(x - a)$, tedy v našem případě ve tvaru $y(x) = d_1 + d_2(x - 1)$. Pak dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 1 &= y(1) = d_1 + d_2(1 - 1) = d_1 \\ 2 &= y'(1) = d_2 \end{aligned}$$

Tedy $y(x) = 1+2(x-1)$. Všimněme si, že $d_1 = f(a)$ a $d_2 = f'(a)$ (hledaná tečna je tedy Taylorův polynom funkce f v bodě $a = 1$ řádu $n = 1$.

b) $y(x) = 0 + 1(x - (-1)) = x + 1$

c) $y(x) = 3 - 7(x - 2)$

d) $y(x) = -2 + 3(x - 1)$

7. a) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, tedy $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{4}$ a $f''(0) = 0$ (viz cvičení 2.c)). Tedy

$$T_2^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$

b) $f(x) = e^{2x-x^2}$, tedy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x-x^2}(2 - 2x), \\ f''(x) &= e^{2x-x^2}((2 - 2x)^2 - 2) = e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 2), \\ f'''(x) &= e^{2x-x^2}((4x^2 - 8x + 2)(2 - 2x) + 8x - 8) = e^{2x-x^2}(-8x^3 + 24x^2 - 12x - 4). \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 2$ a $f'''(0) = -4$. Hledaný Taylorův polynom má tvar

$$T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3.$$

c) S využitím výsledků z cvičení 2.d) máme $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ a $f''(x) = -\frac{\sin x}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \sin x\sqrt{1 + x} + \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$, tedy

$$f'''(x) = -\frac{\cos x \cdot 4(1 + x)^{\frac{3}{2}} - \sin x \cdot 6(1 + x)^{1/2}}{16(1 + x)^3} - \cos x\sqrt{1 + x} - \frac{\sin x}{2\sqrt{1 + x}} + \frac{-\sin x\sqrt{1 + x} - \frac{\cos x}{2\sqrt{1+x}}}{1 + x}.$$

Po dosazení dostaneme $f(0) = 0$ a $f'''(0) = -\frac{7}{4}$. Hledaný Taylorův polynom má tvar

$$T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^3.$$

Počítat druhou, třetí nebo i vyšší derivací u funkce $f(x) = \sqrt{1 + x}\sin x$ může být časově náročné, ale Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{1 + x}\sin x$ lze získat i jiným, než právě uvedeným způsobem. Určeme si nejdříve Taylorovy polynomy řádu $n = 3$ pro funkce $g(x) = \sin x$ a $k(x) = \sqrt{1 + x}$. Jelikož $g'(x) = \cos x$, $g''(x) = -\sin x$, $g'''(x) = -\cos x$, $k'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-\frac{1}{2}}$, $k''(x) = \frac{-1}{4}(1 + x)^{-\frac{3}{2}}$ a $k'(x) = \frac{3}{8}(1 + x)^{-\frac{5}{2}}$, tak

$$\begin{aligned} T_3^{g,0}(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3, \\ T_3^{k,0}(x) &= k(0) + k'(0)x + \frac{k''(0)}{2}x^2 + \frac{k'''(0)}{6}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3. \end{aligned}$$

Z Peanovy věty víme, že $T_3^{f,0}(x)$ je jediný polynom stupně $n \leq 3$ splňující $f(x) - T_3^{f,0}(x) = o(x^3)$. Víme ale také, že $\sin x - T_3^{g,0}(x) = 0(x^3)$ a $\sqrt{1+x} - T_3^{k,0}(x) = o(x^3)$. Z toho dostaneme rovnost $\sin x\sqrt{1+x} - T_3^{g,0}(x)T_3^{k,0}(x) = 0(x^3)$. Jelikož

$$T_3^{g,0}(x)T_3^{k,0}(x) = (x - \frac{1}{6}x^3)(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^3 + o(x^3),$$

tedy $T_3^{f,0}(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^3$.

d)

$$f'(x) = -\frac{x+1}{x^2+1} \cdot \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2+x+1}$$
$$f''(x) = -\frac{(2x+2)(x^3+x^2+x+1) - (x^2+2x-1)(3x^2+2x+1)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$$

Po dosazení dostaneme $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$ a $f''(x) = -3$. Hledaný Taylorův polynom má tvar

$$T_2^{f,0}(x) = 2 + x - \frac{3}{2}x^2.$$

8. a) $T_3^{\sin x,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

b)

$$T_3^{\sin x,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$$
$$T_3^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

Tedy

$$e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - x(x+1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

c)

$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(a^x)' = a^x \ln^2 a$$
$$(a^{-x})' = -a^x \ln a$$
$$(a^{-x})' = a^x \ln^2 a$$
$$T_2^{a^x,0} = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2}x^2$$
$$T_2^{a^{-x},0} = 1 - \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2}x^2 + 1 - \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2}x^2 - 2 + o(x^2)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 a \cdot x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\ln^2 a + \frac{o(x^2)}{x^2})}{x^2} = \ln^2 a$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2(x+o(x))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3))}=\frac{1}{3}$$

e)

$$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{arctg}x)''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$(\mathrm{arctg}x)'''=\frac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$$
$$T_3^{\mathrm{arctg}x,0}=0+x+0\cdot x^2-\frac{2}{6}x^3=x-\frac{1}{3}x^3$$
$$T_3^{\cos x,0}=1-\frac{1}{2}x^2$$
$$\cos x\cdot\mathrm{arctg}x=(1-\frac{1}{2}x^2+0(x^3))(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^3+0(x^3)=x-\frac{5}{6}x^3+0(x^3)$$
$$T_2^{2e^x,0}(x)=2+2x+2\frac{x^2}{2}=2+2x+x^2$$
$$T_2^{e^{2x},0}(x)=1+2x+2^2\frac{x^2}{2}=1+2x+2x^2$$
$$x(2e^x-e^{2x}-1)=x(2+2x+x^2-(1+2x+2x^2+0(x^2))-1)=x(-x^2+o(x^2))=-x^3+0(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\mathrm{arctg}x-x}{x(2e^x-e^{2x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{5}{6}x^3+0(x^3)-x}{x^3+0(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{6}x^3+0(x^3)}{x^3+0(x^3)}=\frac{-5}{6}.$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{y\to 0+}\frac{1}{y}(\sqrt[6]{1+y}-\sqrt[6]{1-y})=(*)$$
$$(\sqrt[6]{1+y}-\sqrt[6]{1-y})'=\frac{1}{6}(1+y)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-y)^{-\frac{5}{6}}\Rightarrow T_1^{\sqrt[6]{1+y}-\sqrt[6]{1-y},0}(y)=0+\frac{1}{3}y+o(y)$$
$$(*)=\lim_{y\to 0+}\frac{\sqrt[6]{1+y}-\sqrt[6]{1-y}}{y}=\lim_{y\to 0+}\frac{\frac{1}{3}y+o(y)}{y}=\frac{1}{3}$$

g)

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\lim_{y\to 0+}\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}-2}{y^2}=(*)$$

$$\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}\right)'=\frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}\right)''=-\frac{1}{4}(1+y)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(1-y)^{-\frac{3}{2}}$$
$$T_2^{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y},0}(y)=2-\frac{1}{4}y^2+o(y^2)$$

$$(*)=\lim_{y\to 0+}\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}-2}{y^2}=\lim_{y\to 0+}\frac{2-\frac{1}{4}y^2+o(y^2)-2}{y^2}=\lim_{y\to 0+}\frac{y^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(y^2)}{y^2}\right)}{y^2}=-\frac{1}{4}$$

h)

$$\lim_{x\to\infty}(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim_{y\to 0+}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right) = \lim_{y\to 0+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2} = (*)$$

$$T_2^{\ln(1+y),0} = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

$$(*) = \lim_{y\to 0+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2} = \lim_{y\to 0+}\frac{y-(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2))}{y^2} = \lim_{y\to 0+}\frac{\frac{1}{2}y^2+o(y^2))}{y^2} = \frac{1}{2}$$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x - e^{\sin x} - e^{\arcsin x}}{x^5}$. Označme $f(x) = e^{\sin x}$ a $g(x) = e^{\arcsin x}$. Jelikož je ve jmenovately člen x^5, tak určíme Taylorovy polynomy funkcí v čitately do stupně $n = 5$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin x}, & f(0) &= 1\\
f'(x) &= e^{\sin x}\cos x, & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x), & f''(0) &= 1\\
f'''(x) &= e^{\sin x}(\cos^3 x - \cos x\sin x - 2\cos x\sin x - \cos x) = e^{\sin x}(\cos^3 x - 3\cos x\sin x - \cos x), & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= e^{\sin x}(\cos^4 x - 3\cos^2 x\sin x - \cos^2 x - 3\cos^2 x\sin x + 3\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x)\\
&= e^{\sin x}(\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin x - 4\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sin x) & f^{(4)}(0) &= -3\\
f^{(5)}(x) &= e^{\sin x}(\cos^5 x - 4\cos^3 x - 6\cos^3 x + \cos x + ...) & f^{(5)}(0) &= -8
\end{aligned}$$

Při určování $f^{(5)}(x)$ počítáme jen členy, které neobsahují $\sin x$ (členy obsahující $\sin x$ při dosazení v nule nemají vliv).

$$T_5^{f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!}.$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{\arcsin x}, & g(0) &= 1\\
g(x)' &= e^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & g'(0) &= 1\\
g(x)'' &= e^{\arcsin x}\left((1-x^2)^{-1} + (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}x\right), & g''(0) &= 1\\
g(x)''' &= e^{\arcsin x}\left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + (1-x^2)^{-2}x + (1-x^2)^{-2}2x + (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}2x^2\right)\\
&= e^{\arcsin x}\left(2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(1-x^2)^{-2}x + 3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}x^2\right), & g'''(0) &= 2\\
g^{(4)}(x) &= e^{\arcsin x}\left(2(1-x^2)^{-2} + 3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}x + 6(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}x + 3(1-x^2)^{-2} + 6(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}x + ...\right)\\
&= e^{\arcsin x}\left(5(1-x^2)^{-2} + 15(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}x + ...\right), & g^{(4)}(0) &= 5\\
g^{(5)}(x) &= e^{\arcsin x}\left(5(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + ...\right) & g^{(5)}(0) &= 20
\end{aligned}$$

Při určování $g^{(4)}(x)$ počítáme jen členy, které neobsahují $x^2, x^3, ...$ v čitately, při určování $g^{(5)}(x)$ počítáme jen členy, které neobsahují x, x^2, x^3 v čitately. Tyto členy nemají na hodnoty $g^{(4)}(0)$ a $g^{(5)}(0)$ vliv.

$$T_5^{g,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{20x^5}{5!}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - e^{\sin x} - e^{\arcsin x}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sum_{i=0}^{5}\frac{x^5}{5!} - (1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!}) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{20x^5}{5!}) + o(x^5)}{x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^5}{5!} + \frac{8x^5}{5!} - \frac{20x^5}{5!} + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{10}{5!} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = -\frac{1}{12}.$$

9. a) Použijeme Taylorův polynom $T_n^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ v bodě $x = 1$

$$|R_n(x)| = \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^{x_0}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Potřebujeme tedy takové n, aby $(n+1)! > 3000$.

n	1	2	3	4	5	6
$(n+1)!$	2	6	24	120	720	5040

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{6!} = \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,718056.$$

Pro porovnání $e = 2,718282$

b)

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

Zvolme $a = 3$ (jelikož $a = 3$ je blízko $x = e$ = a $\sqrt{1+3} = 2$). Pak $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(e-3)^{n+1}$, kde $x_0 = (e, 3)$. Jelikož $|x - a| = |e - 3| < 0,3$, pak

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(x_0)}{2!}(e-3)^2\right| = \left|\frac{-\frac{1}{4}}{2(1+x_0)^{\frac{3}{2}}}(e-3)^2\right| \approx \left|\frac{-\frac{1}{4}}{2(1+3)^{\frac{3}{2}}}(0,3)^2\right| = \frac{9}{2^5}\cdot 10^{-2} = \frac{9}{64}\cdot 10^{-2} \approx 1,5\cdot 10^{-3}$$
$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(x_0)}{3!}(e-3)^3\right| = \left|\frac{\frac{3}{8}}{6(1+x_0)^{\frac{5}{2}}}(e-3)^3\right| \approx \left|\frac{\frac{3}{8}}{6(1+3)^{\frac{5}{2}}}(0,3)^3\right| = \frac{3^3}{2^9}\cdot 10^{-3} = \frac{27}{512}\cdot 10^{-3} \approx 0,5\cdot 10^{-4}$$

K aproximaci tedy použijeme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ v bodě $a = 3$ stupně $n = 2$ ($|R_2(x)|$ je dostatečně malé).

$$f(a) = \sqrt{1+3} = 2$$
$$f'(a) = \frac{1}{2}(1+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$
$$f''(a) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2^5}$$

$$T_2^{f,a}(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-a) - \frac{1}{64}(x-a)^2,$$
$$\sqrt{1+e} \approx 2 + \frac{1}{4}(-0,282) - \frac{1}{64}(-0,282)^2 \approx 2 - 0,0705 - \frac{28^2}{64}\cdot 10^{-4} = 1,9295 - \frac{7^2}{4}\cdot 10^{-4}$$
$$= 1,9295 - 0,0012025 \approx 1,9283.$$

Pro porovnání $\sqrt{1+e} = 1,928285$.

c) Použijeme Taylorův polynom $T_{2n}^{\sin x,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ...(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x = 0,1$.

$$|R_1(x)| = |R_2(x)| = |\frac{-\cos x_0}{3!}x^3| < \frac{1}{6}\cdot 10^{-3} = 0,0001666$$
$$|R_3(x)| = |R_4(x)| = |\frac{\cos x_0}{5!}x^5| < \frac{1}{120}\cdot 10^{-5} = 0,8333\cdot 10^{-7}$$

Tedy

$$\sin 0,1 \approx 0,1 - \frac{0,1^3}{3!} = 0,1 - 0,1666\cdot 10^-3 = 0,0998333.$$

Pro porovnání $\sin 0,1 = 0,0998342$.

d) K aproximaci použijeme Taylorův polynom $T_n^{\sin x, \frac{\pi}{6}}(x)$, tedy $a = \frac{\pi}{6}$ a $x = \frac{11}{60}\pi = a + \frac{\pi}{60}$.

$$|R_1(x)| = \left|\frac{-\sin(x_0)}{2!}(x-a)^2\right| < \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}{2} \approx \frac{1}{8}\cdot 10^{-2} = 0,00125$$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{-\cos(x_0)}{3!}(x-a)^3\right| < \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^3}{6} \approx \frac{0,000125}{6} \approx 0,000021$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin(x_0)}{4!}(x-a)^4\right| < \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^4}{24} \approx \frac{0,0000021}{8} \approx 0,00000025.$$

Tedy volíme $n = 3$.

$$\begin{aligned}\sin 33° \approx T_3^{\sin x, a}(x) &= \sin a + \cos a(x-a) + \frac{-\sin a}{2!}(x-a)^2 + \frac{-\cos a}{3!}(x-a)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{60} - \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 = 0,5446389.\end{aligned}$$

Pro porovnání $\sin 33° = 0,54463904$.

e) Zvolíme funkci $f(x) = x^{1,2}$, $a = 1$ a $x = 1,1$.

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(x_0)}{2!}(x-a)^2\right| = \left|\frac{1,2\cdot 0,2\cdot (x_0)^{-0,8}}{2!}(x-a)^2\right| < \frac{1,2\cdot 0,2}{2}\cdot 10^{-2} = 1,2\cdot 10^{-3}$$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-a)^3\right| = \left|\frac{-1,2\cdot 0,2\cdot 0,8\cdot (x_0)^{-1,8}}{3!}(x-a)^3\right| < 1,2\cdot 10^{-3}\cdot \frac{0,8}{3}\cdot 10^{-1} = 0,32\cdot 10^{-4}.$$

Tedy volíme $n = 2$.

$$\begin{aligned}1,1^{1,2} \approx T_2^{f(x),a}(x) &= f(a) + f'(a)\cdot 0,1 + \frac{f''(a)}{2}\cdot 0,01 = 1 + 1,2\cdot 0,1 + \frac{1,2\cdot 0,2}{2}\cdot 0,01 \\ &= 1 + 0,12 + 0,0012 = 1,1212.\end{aligned}$$

Pro porovnání $1,1^{1,2} = 1,121169$.