

Kapitola 1

Diferenciální rovnice

1.0.1 Motivace

Uvažujme onemocnění covid19 s reprodukčním číslem $r = 1.2$, inkubační dobou $t = 5$ dní a s 4500 nakaženými v čase $t = 0$ (označme $y_0 = 500$). Jaký bude vývoj této nemoci v čase? Zkusme nejdříve pracovat s diskretními modely.

model 1.0: Uvažujeme-li časový krok $\Delta t = 5$, pak:

$$\begin{aligned}y_0 &= 500 \\y_5 &= y_0 \cdot r = 600 \\y_{10} &= y_0 \cdot r^2 = 720 \\&\dots \\y_{5k} &= y_0 \cdot r^k.\end{aligned}$$

model 1.1: Uvažujeme-li časový krok $\Delta t = 1$, pak:

$$\begin{aligned}y_0 &= 500 \\y_1 &= y_0 \cdot \sqrt[5]{r} = 500 \cdot \sqrt[5]{1.2} \doteq 518 \\y_2 &= y_0 \cdot \sqrt[5]{r^2} \doteq 538 \\&\dots \\y_k &= y_0 \sqrt[5]{r^k} = 500 \cdot 1.2^{\frac{k}{5}}.\end{aligned}$$

model 1.2: Pro obecnější časový krok $\Delta t = \frac{5}{n}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} y_0 &= 500 \\ y_{\Delta t} &= y_0 \cdot \sqrt[n]{r} \\ y_{k \cdot \Delta t} &= y_{(k-1)\Delta t} \sqrt[n]{r} = y_0 \cdot \sqrt[n]{r^k} = 500 \cdot 1.2^{\frac{k}{n}} \\ \Delta y_t &= y_{t+\Delta t} - y_t = y_t (\sqrt[n]{1.2} - 1) = y_t (1.2^{\frac{\Delta t}{5}} - 1). \end{aligned}$$

model 2.0: Přejděme nyní z diskrétního na spojitý model. Vyjdeme z posledního modelu (1.2) a z definice derivace.

$$\begin{aligned} y'_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_{t+\Delta t} - y_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_t (1.2^{\frac{\Delta t}{5}} - 1)}{\Delta t} \\ &= y_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\Delta t}{5} \ln 1.2} - 1}{\Delta t} = \frac{\ln 1.2}{5} \cdot y_t. \end{aligned}$$

Dostaneme tedy rovnice

$$y_0 = 500 \tag{1.1}$$

$$y'_t = \frac{\ln 1.2}{5} \cdot y_t. \tag{1.2}$$

Rovnosti 1.1 se říká **počáteční podmínka** a rovnice 1.2 se nazývá **diferenciální rovnice** (konkrétněji **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

Zkusme nyní vyřešit rovnici 1.2.

$$\begin{aligned} y'_t &= \frac{\ln 1.2}{5} \cdot y_t \\ \frac{y'_t}{y_t} &= \frac{\ln 1.2}{5}, \quad (y_t \neq 0) \\ \int \frac{y'_t}{y_t} dt &= \int \frac{\ln 1.2}{5} dt \\ \ln |y_t| &= \frac{\ln 1.2}{5} t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ |y_t| &= e^{\frac{\ln 1.2}{5} t + C} \\ y_t &= \pm e^C \cdot e^{\frac{t \ln 1.2}{5}}. \end{aligned}$$

Označíme-li $C_1 = \pm e^C$, pak dostaneme řešení rovnice 1.2 ve tvaru $y_t = C_1 \cdot e^{\frac{t \ln 1.2}{5}}$, kde $C_1 \in \mathbb{R} \setminus 0$. Uvedený postup ale pracoval s podmínkou $(y_t \neq 0)$. Je třeba si

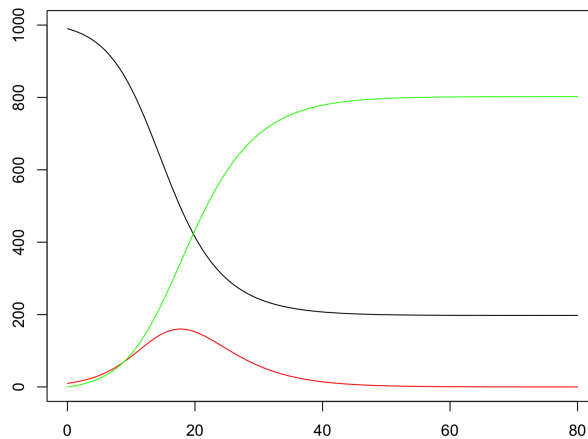
uvědomit, že konstantní nulová funkce $y_t = 0$ také řeší rovnici 1.2, a o toto řešení jsme uvedeným postupem přišli. Obecné řešení této rovnice je tedy $y_t = C_2 \cdot e^{\frac{t \cdot \ln 1.2}{5}}$, kde $C_2 \in \mathbb{R}$.

Pokud nyní použijeme počáteční podmínku 1.1, dostaneme $y_0 = C_2 \cdot e^{\frac{0 \cdot \ln 1.2}{5}} = C_2 = 500$, tedy hledané řešení je ve tvaru $y_t = 500 \cdot e^{\frac{t \cdot \ln 1.2}{5}}$, $t \in [0, \infty)$.

model 3.0 (Kermack-McKendrick 1927): Většinou se u šíření epidemií používají o trochu složitější modely. Jako příklad uvádíme následující model, kde x_t značí počet zdravých jedinců v čase t , kteří mohou být nakaženi, y_t počet nakažených jedinců, kteří mohou šířit nemoc a z_t počet jedinců, kteří nemoc prodělali a už ji šířit nemohou.

$$\begin{aligned}x'_t &= -\beta x_t y_t \\y'_t &= \beta x_t y_t + \gamma y_t \\z'_t &= -\gamma y_t,\end{aligned}$$

kde uvažujeme počáteční podmínky $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 \geq 0$ a parametry $\beta > 0$ a $\gamma > 0$. Parametr β je dán rychlostí šíření nemoci, parametr γ zase popisuje rychlost uzdravování jedinců.



Obrázek 1.1:

Na obrázku je vývoj epidemie dle modelu 3.0. Černá čára reprezentuje zdravé jedince x_t , červená nakažené jedince y_t a zelená vyléčené jedince z_t . Použité parametry jsou $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$ a $\gamma = 0.25$, počáteční podmínky $x_0 = 990$, $y_0 = 10$ a $z_0 = 0$.

1.0.2 Úvod

Definice 1.1 *Diferenciální rovnici* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných. Není-li F konstantní funkce vzhledem k poslední proměnné, mluvíme o **diferenciální rovnici n -tého řádu**.

Definice 1.2 *Řešením rovnice 1.3* rozumíme reálnou funkci $y(x)$ definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v I vlastní n -tou derivaci a pro každé $x \in I$ platí:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Řešení y rovnice 1.3 nazveme **maximální**, jestliže neexistuje řešení této rovnice z takové, že $D_y \subsetneq D_z$ a $y(x) = z(x)$ na D_y .

Příklad 1.1 *Rovnice $y' - y = 0$ má řešení $y(t) = e^t$ na \mathbb{R} (toto řešení je maximální).*

Definice 1.3 *Říkáme, že řešení $y(x)$ rovnice 1.3 splňuje počáteční podmínku y_0, y_1, \dots, y_{n-1} v bodě t_0 , jestliže $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, x_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.*

*Úloha nalézt řešení $y(x)$ diferenciální rovnice 1.4, které splňuje počáteční podmínku $y^{(k)}(x_0) = y_k$ pro $x_0 \in I$ a $k = 0, 1, \dots, n - 1$ se nazývá **Cauchyova úloha**.*

1.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Dále se budeme zabývat rovnicemi ve tvaru

$$y' = f(x, y), \quad (1.4)$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných, definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^2$.

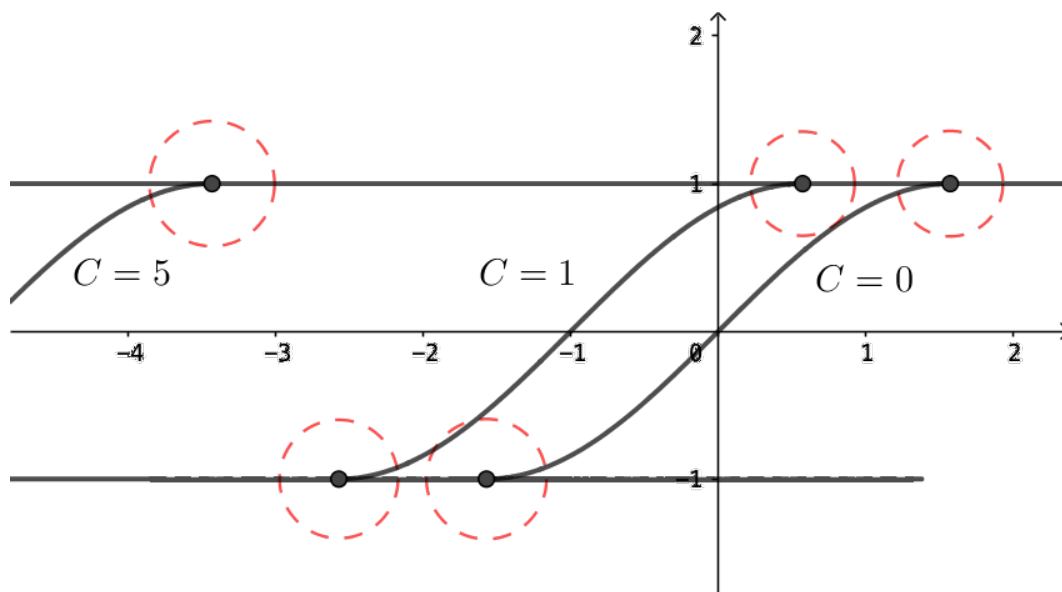
Uvedeme si následující větu bez důkazu.

Věta 1.1 *(Peanove - existenční) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$ a $(x_0, y_0) \in M$ je libovolný bod. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice 1.4 procházející tímto bodem. Tj. existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $y'(x) = f(x, y(x))$ a navíc platí: $y(x_0) = y_0$.*

Příklad 1.2 Uvažujme rovnici $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Tato rovnice má řešení $y(x) \equiv \pm 1$ na \mathbb{R} i

$$y_c = \begin{cases} -1, & x < -C - \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x + C), & -C - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -C + \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > -C + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

kde C je libovolná reálná konstanta.



Na obrázku jsou znázorněna jak konstantní řešení $y = \pm 1$, tak nekonečné řešení s volbou konstant $C = 0, 1$ a $C = 5$. Jak je z obrázku patrné, v červeně vyznačených bodech se konstantní a nekonečné řešení rozpojují (je zde nejednoznačnost řešení). Otázkou je, zda existují podmínky na rovnici 1.4, které zaručují, že takové chování nenastane.

Věta 1.2 (Picardova - o jednoznačnosti řešení) Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce na $M = (a, b) \times (c, d)$, která navíc splňuje **lokální Lipschitzovu podmínku** v proměnné y , tj. ke každému bodu $(x_0, y_0) \in M$ existuje okolí $U(x_0, y_0)$ tohoto bodu a číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ pro každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in U(x_0, y_0)$. Potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice 1.4 procházející bodem (x_0, y_0) .

1.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nazveme rovnicí se separovanými proměnnými, pokud má tvar

$$y' = f(x)g(y), \quad (1.5)$$

kde f a g jsou spojité funkce. Je-li $g \neq 0$, tak z rovnice 1.5 dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zintegrováním této rovnice dostaneme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Je-li $G(y)$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, tak dostaneme rovnici

$$G(y) = F(x) + c,$$

tedy

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

Poznámka 1.1 Je důležité nezapomenout na integrační konstantu c , ta nám umožňuje najít řešení, které splňuje konkrétní počáteční podmínku.

Příklad 1.3 Najděte řešení rovnice $y' = \sqrt{|y|}$.

Řešení: Pro $y \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \\ \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= 1 \\ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= \int 1dx \\ 2 \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|} &= x + c. \end{aligned}$$

Jelikož $\sqrt{|y|} > 0$, tak y a $x + c$ má stejné znaménko, tedy pro $x > -c$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= \frac{x + c}{2} \\ y &= \frac{(x + c)^2}{4}, \quad x > -c. \end{aligned}$$

Stejně dostaneme

$$y = -\frac{(x+c)^2}{4}, \quad x < -c.$$

Pro $y = 0$ dostaneme konstantní řešení $y(x) = 0$.

Příklad 1.4 Najděte řešení rovnice $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Řešení:

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \tag{1.6}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x} \tag{1.7}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x} dx \tag{1.8}$$

$$\arcsin y = \ln|x| + c. \tag{1.9}$$

Zde je třeba si uvědomit, že obor hodnot funkce \arcsin je $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tedy rovnost $\arcsin y = \ln|x| + c$ platí pro takové x a c , pro které je $\ln|x| + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dále tedy dostaneme $y = \sin(\ln|x| + c)$, pro $x \in (e^{\frac{-\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c})$. Zkusme třeba pro volbu $c = 0$ a $x \in (e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\pi})$ zjistit, zda je funkce $y = \sin(\ln|x| + c) = \sin(\ln|x|)$ řešením naší rovnice. Pak dostaneme, že

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

a

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(\ln x)}}{x} = \frac{\sqrt{\cos(\ln x)}}{x} = \frac{-\cos(\ln x)}{x}.$$

Tedy pro takové c a t je $y(x)$ řešením rovnice $y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Příklad 1.5 Řešte Cauchyho úlohu $y = -2xy$, $y(0) = 2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}y' &= -2xy \\ \frac{dy}{y} &= -2xdx \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int 2xdx \\ \ln |y| &= -x^2 + c \\ |y| &= e^c \cdot e^{-x^2} \\ y &= \pm e^c \cdot e^{-x^2}.\end{aligned}$$

Jelikož je řešením i $y \equiv 0$, tak můžeme obecné řešení napsat ve tvaru $y = ce^{-x^2}$, kde $c \in \mathbb{R}$. Máme tedy obecný tvar řešení, dosazením počátečních podmínek do obecného řešení najdeme to řešení, které vyhovuje počáteční podmínce. $y(0) = ce^0 = c = 2$, tedy řešením této úlohy je funkce $y(x) = 2e^{-x^2}$.

Příklad 1.6 (Rozpad radioaktivního materiálu) Příklad je převzatý ze skript J. Kuben (1995): Obyčejné diferenciální rovnice. Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Poloměr rozpadu radia je 1590 let¹. Za kolik let ubude z počátečního množství 25%?

Řešení: Označme $y(t)$ množství radia a $y_0 > 0$ jeho počáteční množství v čase $t = 0$. Ze zadání dostáváme rovnici $y' = Ky$, kde K je neznámá konstanta. Navíc víme, že $y(0) = y_0$ a $y(1590) = \frac{y_0}{2}$.

$$\begin{aligned}y' &= Ky \\ \frac{y'}{y} &= K \\ \ln |y| &= Kt + c, \quad (c \in \mathbb{R}) \\ |y| &= ce^{Kt}, \quad (c > 0) \\ y &= ce^{Kt}, \quad (c \in \mathbb{R})^2.\end{aligned}$$

Jelikož je množství nezáporné, tak uvažujeme řešení pouze ve tvaru $y(t) = ce^{Kt}$, kde $c \geq 0$. Dosazením počáteční podmínky dostaneme $y(0) = ce^{K \cdot 0} = c = y_0$ a

¹Počáteční množství se za 1590 let zmenší na polovinu.

²Zde jsme přidali i triviální řešení $y \equiv 0$.

$y(1590) = y_0 e^{K \cdot 1590} = \frac{y_0}{2}$, tedy $K = \frac{\ln \frac{1}{2}}{1590} = -\frac{\ln 2}{1590}$. Pro hledaný čas t_1 platí

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} y_0 &= y(t_1) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590} t_1} \\ \ln \frac{3}{4} &= -\frac{\ln 2}{1590} t_1 \\ t_1 &= -1590 \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 660. \end{aligned}$$

Množství radia se sníží o čtvrtinu přibližně za 660 let.

1.1.2 Homogenní rovnice

Definice 1.4 Funkce $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá homogenní stupně α v $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $\lambda > 0$ a $\forall x \in M$ platí $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ ³. Je-li $g(x, y) = \frac{m(x, y)}{l(x, y)}$, kde m a l jsou homogenní funkce stejného stupně, pak rovnici

$$y' = g(x, y)$$

nazveme homogenní diferenciální rovnicí.

Pro $g(x, y) = \frac{m(x, y)}{l(x, y)}$ platí,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \frac{m(\lambda x, \lambda y)}{l(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^\alpha m(x, y)}{\lambda^\alpha l(x, y)} = \frac{m(x, y)}{l(x, y)} = g(x, y),$$

tedy g je homogenní funkce stupně 0.

Pro $\lambda = \frac{1}{x}$ tedy dostaneme $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y) = g(1, \frac{y}{x})$, tedy pro $f(z) := g(1, z)$ dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$. Zavedeme neznámou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, pak $y(x) = u(x)x$ a tedy $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Dosazením a úpravou dostaneme

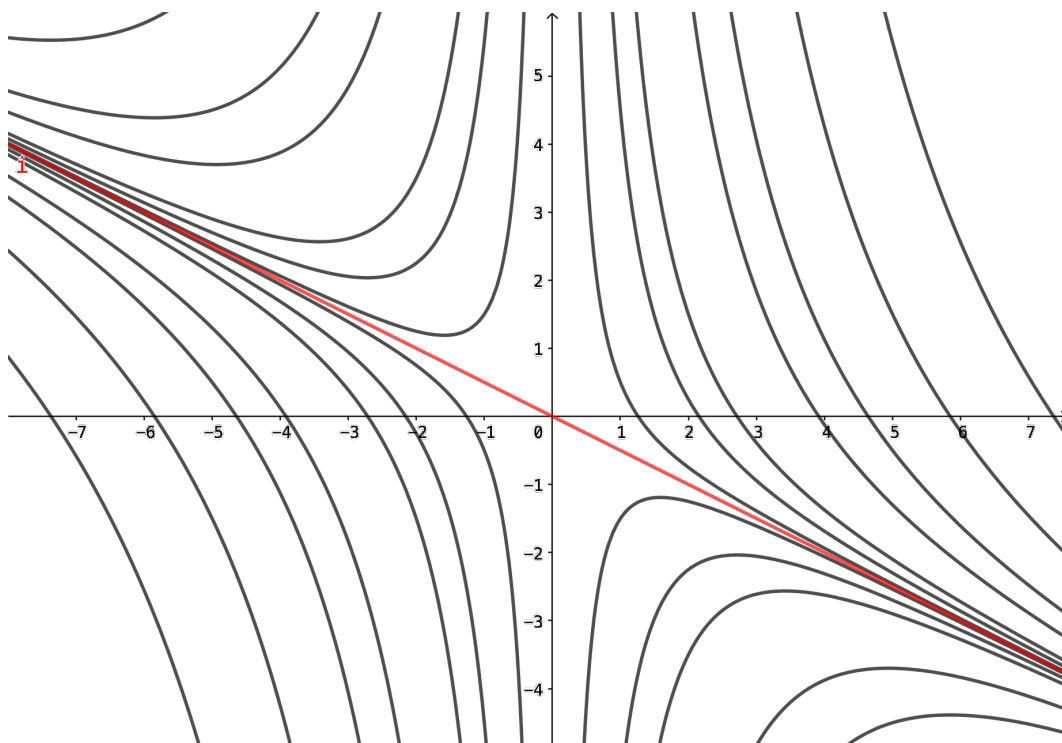
$$\begin{aligned} y' &= g(x, y) \\ u'x + u &= f(u) \\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}. \end{aligned}$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již řešíme dle dříve uvedeného postupu.

³Všimněme si, že zde hovoříme o funkci n proměnných, tedy $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.2 Všimněme si, že při úpravách potřebujeme podmínku $x \neq 0$. Tato podmínka ale vzniká při úpravách a při přechodu k původní proměnné zase zmizí, proto je třeba overřit, zda námi získané řešení není řešením i v bodě $x = 0$.

Příklad 1.7 Najděte obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$.



Řešení: Nejdříve overříme, že jde o homogenní rovnici. Přepíšeme rovnici do tvaru $y' = -\frac{x+y}{x}$, tedy $g(x, y) = -\frac{x+y}{x}$, pak platí $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y)$ a tedy jde o homogenní

rovnici. Použijeme substituci $u(x) = \frac{y}{x}$ a dosadíme do rovnice.

$$\begin{aligned}x + y + xy' &= 0 \\x + ux + x(u'x + u) &= 0 \\u' &= -\frac{1 + 2u}{x} \\ \frac{u'}{1 + 2u} &= -\frac{1}{x}, \quad (u \neq \frac{1}{2}) \\ \frac{\ln |1 + 2u|}{2} &= -\ln |x| + c \\ |1 + 2u| &= \frac{c}{x^2}, \quad (c > 0) \\ u &= \frac{\frac{c}{x^2} - 1}{2} = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2}, \quad (c \in \mathbb{R})^4.\end{aligned}$$

Jelikož $y(x) = u(x)x$, tak dostaneme řešení $y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$, $c \in \mathbb{R}$ a $x > 0$ nebo $x < 0$. Pro $c = 0$ dostaneme řešení $y(x) = -\frac{x}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení jsou znázorněna na předchozím obrázku. Je dobré si uvědomit, že pouze lineární řešení (označené červeně) je definováno na celém \mathbb{R} . Ostatní řešení jsou definována pro $x > 0$ a nebo pro $x < 0$,

1.1.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{1.10}$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou reálné funkce, nazveme lineární diferenciální rovnicí prvního řádu. Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na nějakém intervalu J , pak funkce $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ splňuje lokální Lipschitzovu podmínku a tedy dle věty 1.2 každým bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno maximální řešení této rovnice. Lze ukázat, že řešení lze prodloužit na celý interval J .

Věta 1.3 *Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na intervalu J , tak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ existuje právě jedno maximální řešení, které tuto podmínku splňuje.*

⁴Zde jsme přidali i konstantní řešení rovnice $u = -\frac{1}{2}$.

Důkaz

Použijeme-li větu 1.2, stačí ukázat, že je funkce $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ lokálně Lipschitzovská v proměnné y . Tedy, že pro každý bod (x_0, y_0) existují okolí U a konstanta K takové, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K|y_1 - y_2| \forall (x, y_i) \in U, i = 1, 2$. Jelikož jsou funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité, tak jsou na uzavřeném intervalu omezené, tedy pro každé $x_0 \in J$ existuje nějaké okolí $U(x_0)$ a konstanta K taková, že $|a(x)| < K$ na $U(x_0)$. Pak pro $x \in U(x_0)$ dostaneme $|b(x) - a(x)y_1 - (b(x) - a(x)y_2)| < K|y_1 - y_2|$, tedy je splněna lokální Lipschitzova podmínka a rovnice má jednoznačné maximální řešení. \square

Definice 1.5 *Rovnice $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ se nazývá homogenní. Je-li $b(x)$ nenulová funkce, tak jde o rovnici nehomogenní.*

Poznámka 1.3 *Nezaměňujeme homogenní lineární rovnici s homogenní rovnicí z předchozí kapitoly. Jde o zcela odlišné pojmy.*

Uvažujme nyní homogenní rovnici

$$y' = -a(x)y, \quad (1.11)$$

kde $a(x)$ je spojitá funkce.

Věta 1.4 *Je-li $y_h(x)$ netriviální řešení rovnice 1.11 na intervalu J , pak obecné řešení této rovnice (na tomto intervalu) je ve tvaru $y(x) = cy_h(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

Důkaz

Je-li $y_h(x)$ řešením rovnice 1.11, pak

$$(cy_h(x))' = c(y_h(x))' = c(-a(x)y_h(x)) = -a(x)(cy_h(x))$$

a tedy je i $cy_h(x)$ řešením této rovnice. Nechť existuje řešení $y_1(x)$ (na intervalu J) rovnice 1.11, které není ve tvaru $cy_h(x)$. Je-li $y_0 = y_1(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in J$, pak pro $c = \frac{y_0}{y_h(x_0)}$ splňuje i řešení $cy_h(x)$ počáteční podmínku (x_0, y_0) , což je ale v rozporu s jednoznačností (věta 1.3). Tedy každé řešení musí být ve tvaru $cy_h(x)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. \square

Označme $A(x)$ primitivní funkci k funkci $a(x)$. Jelikož je homogenní rovnice rovnicí se separovanými proměnnými, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} y' &= -a(x)y \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln |y| &= -A(x) + c \\ y &= ce^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Vraťme se nyní k nehomogenní rovnici 1.10

$$y' = -a(x)y + b(x),$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce.

Věta 1.5 *Nechť $y_p(x)$ je řešením rovnice 1.10 a $y_h(x)$ je řešením homogenní rovnice 1.11, pak $y(x) = cy_h(x) + y_p(x)$ pro $c \in \mathbb{R}$ je obecným řešením rovnice 1.10.*

Důkaz

Prostým dosazením overíme, že je $cy_h(x) + y_p(x)$ řešením rovnice 1.10. Je-li $\hat{y}(x)$ řešením rovnice 1.10, pak $\hat{y}(x) - y_p(x)$ musí být řešením rovnice 1.11 (opět overíme prostým dosazením) a tedy ve tvaru $cy_h(x)$ dle věty 1.4.

Z uvedené věty vyplývá, že k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice 1.10 stačí najít obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.11 a jedno řešení (partikulární řešení) nehomogenní rovnice 1.10. Obecné řešení homogenní rovnice hledat již umíme, nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice si ukážeme nyní pomocí metody variace konstant.

Variace konstant

Nechť $y_h(x)$ je řešení homogenní rovnice 1.11, pak hledáme řešení nehomogenní rovnice 1.10 ve tvaru $y(x) = c(x)y_h(x)$, tj. ve tvaru funkce, kde konstantu c , která nám dává obecný tvar řešení homogenní rovnice 1.11 nahradíme funkcí $c(x)$. Dosadíme $y(x)$ do nehomogenní rovnice a využijeme toho, že $c(x)y_h'(x) = -c(x)a(x)y_h(x)$ ⁵.

$$\begin{aligned}(c(x)y_h(x))' &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\ c(x)y_h'(x) + c'(x)y_h(x) &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\ c'(x)y_h(x) &= b(x) \\ c'(x) &= \frac{b(x)}{y_h(x)} \\ c(x) &= \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx.\end{aligned}$$

Tímto postupem získáme jedno (partikulární) řešení nehomogenní rovnice $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$. Tedy obecné řešení nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = cy_h(x) + \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

⁵Jelikož, y_h je řešením příslušné homogenní rovnice.

Příklad 1.8 Najděte obecný tvar řešení rovnice $y' = 2y + x$.

Řešení:

I. Nejdříve budeme hledat řešení homogenní rovnice $y' = 2y$.

$$\begin{aligned}y' &= 2y \\ \frac{y'}{y} &= 2, \quad (y \neq 0) \\ \ln |y| &= 2x + c \\ y &= ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

II. Nyní použijeme metodu variace konstant k nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Uvažujme řešení ve tvaru $y(x) = c(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned}y' &= 2y + x \\ c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} &= 2c(x)e^{2x} + x \\ c'(x) &= xe^{-2x} \\ c(x) &= \frac{xe^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).\end{aligned}$$

Tedy

$$y_p(x) = c(x)y_h(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

III. Obecný tvar řešení je tedy

$$y(x) = y_p(x) + cy_h(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}.$$

Ukažme si nyní jiný způsob, jak najít nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.10. Použijeme opět označení $A(x)$ pro primitivní funkci k funkci $a(x)$ a budeme upravovat rovnici 1.10.

$$\begin{aligned}y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \\ y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} &= b(x)e^{A(x)} \\ (y(x)e^{A(x)})' &= b(x)e^{A(x)} \\ y(x)e^{A(x)} &= \int b(x)e^{A(x)} dx \\ y(x) &= e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx.\end{aligned}$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice 1.10 lze napsat ve tvaru $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx$. Porovnejme tento výsledek s řešením získaným pomocí variace konstant. Užitím metody variace konstant jsme dostali partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x).$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce dříve získaný tvar řešení homogenní rovnice $y_h(x) = e^{-A(x)}$, tak dostaneme stejný tvar řešení, tj. $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx$.

Příklad 1.9 (Bernoulliho rovnice) Řešte rovnici $y' - y = xy^5$. Tato rovnice není lineární⁶ (je zde člen y^5), ale k jejímu řešení využijeme toho, že umíme řešit lineární rovnici. Rovnici převedeme do tvaru

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} = x, \quad y \neq 0.$$

Zde jsme vynechali případ, kdy $y \equiv 0$, který je také řešením této rovnice. Nyní použijeme substituci $u = \frac{1}{y^4}$, tedy dostaneme $u' = -4\frac{y'}{y^5}$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} &= x \\ -\frac{1}{4}u' - u &= x \\ u' &= -4u - 4x. \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici

$$u' = -4u.$$

Tedy máme řešení $u_h(x) = ce^{-4x}$ a použijeme variaci konstant. Hledáme tedy řešení ve tvaru $u(x) = c(x)e^{-4x}$.

$$\begin{aligned} u' &= -4u + 4x \\ c'(x)e^{-4x} - 4xc(x)e^{-4x} &= -4c(x)e^{-4x} + 4x \\ c'(x) &= 4xe^{4x} \\ c(x) &= \int 4xe^{4x} dx = xe^{4x} - \int e^{4x} dx = e^{4x} \left(x - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Tedy $u(x) = x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ a řešení původní rovnice dostaneme ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}}}.$$

⁶Rovnice tohoto typu se nazývají Bernoulliho rovnice.

1.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

1.2.1 Lineární diferenciální rovnice

Rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (1.12)$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice n -tého řádu. Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu, v opačném případě jde o rovnici nehomogenní.

Platí následující věta ohledně existence a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy.

Věta 1.6 *Nechť jsou funkce $b(x)$ a $a_i(x)$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$ spojité na intervalu J . Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, pak existuje na J právě jedno řešení $y(x)$ rovnice 1.12 splňující podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Definice 1.6 *Reálné (komplexní) funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ jsou lineárně závislé na množině M , jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla c_1, \dots, c_n , že platí*

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0$$

na M a alespoň jedno z čísel c_i je nenulové. Pokud nejsou funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Homogenní diferenciální rovnice n -tého řádu

Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (1.13)$$

Pak pro tuto rovnici platí následující věta, která je obdobou věty 1.4 pro rovnici prvního řádu.

Věta 1.7 *Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení rovnice 1.13 (na J), pak je řešením této rovnice (na J) i $y_1 + y_2$ a cy_1 pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Tedy řešení homogenní rovnice 1.13 tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je n .*

Důkaz

Nechť je y_1 a y_2 řešením homogenní rovnice 1.13. Dosadíme do této rovnice $y = c_1y_1 + c_2y_2$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \\ & (c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + \dots + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = \\ & c_1 \left(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_1 \right) + c_2 \left(y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_2 \right) = 0, \end{aligned}$$

tedy $c_1y_1 + c_2y_2$ je také řešením homogenní rovnice 1.13.

Nechť $x_0 \in J$ a označme y_i pro $i = 1, \dots, n$ řešení rovnice 1.13 splňující počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y_i^{(k)}(x_0) &= 0, & i &\neq k+1 \\ &= 1, & i &= k+1, \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, \dots, n-1$. Existence takových řešení na J zaručuje věta 1.6. Zároveň jde o nezávislá řešení, jelikož

$$\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i y_i^{(k-1)}(x_0) = 0 \neq 1 = y_k^{(k-1)}(x_0),$$

pro libovolná čísla c_1, \dots, c_n .

Ukažme, že tato řešení tvoří bázi prostoru řešení homogenní diferenciální rovnice 1.13, tedy že pro libovolná řešení rovnice y existují konstanty c_i , $i = 1, \dots, n$ takové, že $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$. Nechť y je libovolné řešení této rovnice, pak pro $c_i = y^{(i-1)}(x_0)$ platí, že

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i y_i(t_0) \right)^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)}(x_0) = c_{k+1} y_{k+1}^{(k)}(x_0) = c_{k+1} = y^{(k)}(x_0).$$

Tedy řešení rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^n c_i y_i$ splňuje stejné počáteční podmínky jako řešení y a tedy se tyto dvě řešení musí rovnat dle věty 1.6.

Definice 1.7 *Množinu n nezávislých řešení homogenní rovnice 1.13 na J nazýváme fundamentální systém řešení této rovnice na J .*

Definice 1.8 *Nechť f_1, \dots, f_n mají v bodě x_0 derivace až do řádu $n-1$ včetně. Pak determinant*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \dots & f_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazveme Wronského determinant (nebo Wronskiánem) funkcí f_1, \dots, f_n v bodě x_0 a označíme jej $W(f_1, \dots, f_n)(x_0)$.

Věta 1.8 Necht y_1, \dots, y_n jsou řešení homogenní rovnice 1.13 na intervalu J . Je-li

$$W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0,$$

pro nějaké $x_0 \in J$, tak jsou y_1, \dots, y_n lineárně nezávislé na J a $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$.

Důkaz

Je-li $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$, tak jsou sloupce v determinantu $W(y_1, \dots, y_n)(x_0)$ lineárně závislé, tedy existují konstanty c_1, \dots, c_n takové, že

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Označme $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, pak y je také řešením rovnice 1.13 (věta 1.7) a navíc platí, že $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$. Jelikož $y \equiv 0$ splňuje tuto podmínku, tak z jednoznačnosti řešení lineární rovnice (věta 1.6) plyne $y \equiv 0$, tedy $\sum_{i=1}^n c_i y_i = 0$ na J a proto jsou řešení y_i lineárně závislá. Z lineární závislosti řešení y_1, \dots, y_n na J plyne lineární závislost sloupců v determinantu $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ na J a tedy $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ na J .

Důsledek 1.9 Buď je $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ na J , nebo $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ na J . Množina řešení rovnice 1.7 je nezávislá na J právě tehdy, když $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ na J .

Poznámka 1.4 Předchozí kritérium nezávislosti neplatí obecně pro n -tici funkcí f_1, \dots, f_n která není řešením nějaké homogenní lineární diferenciální rovnice. Obecně platí, že z podmínky $W(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ na J plyne nezávislost funkcí f_1, \dots, f_n na J . Opačně obecně neplatí.

Příklad 1.10 Necht $J = (-1, 1)$ a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, & x < 0 \\ &= x^3, & x \geq 0 \\ f_2(x) &= x^2, & x < 0 \\ &= 0, & x \geq 0. \end{aligned}$$

Pak $W(f_1, f_2)(x) = 0$ na J , ale je-li $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$, tedy f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé.

Věta 1.10 *Nechť jsou y_1, \dots, y_n řešením rovnice 1.13 na intervalu J , pak pro $x, x_0 \in J$ platí*

$$\frac{d}{dx}(W(y_1, \dots, y_n)(x)) = -a_{n-1}(x)W(y_1, \dots, y_n)(x),$$

tedy

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t)dt}. \quad (1.14)$$

Důkaz

Podívejme se nejdříve na případ pro $n = 2$, pak $W(y_1, y_2)(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2)(x)) &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2'' \\ &= (y_1'y_2' - y_1'y_2'') + (y_1y_2'' - y_1''y_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2'' \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Označme $dW_n = \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x))$. Obdobně jako v dvoudimenzionálním případě lze ukázat, že

$$\begin{aligned} dW_n &= \det \begin{pmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že v prvních $n - 1$ determinantech jsou vždy dva řádky stejné, a tak jsou tyto determinanty nulové. Jelikož y_i pro $i = 1, \dots, n$ je řešením

rovnice 1.13, tak dosadíme-li $y_i^{(n)} = -a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - a_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - \dots - a_0(x)y_i$ do předchozího výrazu, dostaneme

$$dW_n = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1}y_1^{(n-1)} - \dots - a_0y_1 & \dots & -a_{n-1}y_n^{(n-1)} - \dots - a_0y_n \end{pmatrix}.$$

Použijem to, že vynásobíme-li nějaký řádek matice konstantou a , tak je determinant nové matice a krát větší, než determinant matice původní a také toho, že determinant matice, jejíž řádek je tvořen součtem vektorů lze rozložit na součet determinantů. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} dW_n &= -a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} - \dots \\ &\quad - a_{n-2}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} - \dots \\ &\quad - a_0(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} - \dots \\ &= -a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(y_1, \dots, y_n)(x). \end{aligned}$$

Jelikož právě dokázaná rovnost je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými (jde o diferenciální rovnici, kde neznámá funkce je funkce wronskiánu, tedy pro každé x vrací hodnotu wronskiánu v tomto bodě), tak druhý vztah je jejím přímým důsledkem. □

Metoda nalezení druhého řešení za pomoci Wronskiánu

Uvažujme rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.15}$$

a necht y_1 je jedno netriviální známé řešení této rovnice. Pak pro libovolné řešení y této rovnice platí

$$W(y_1, y)(x) = y_1 y' - y_1' y = W(y_1, y)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

Zvolíme nyní $W(y_1, y)(x_0) = 1$.⁶ Dostaneme tedy rovnici

$$y_1 y' - y_1' y = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}. \quad (1.16)$$

Je-li y řešením rovnice 1.15, pak musí jít o řešení, které je nezávislé s řešením y_1 , jelikož wronskián $W(y_1, y)(x) \neq 0$.

Je-li naopak y řešením rovnice 1.16, pak

$$\begin{aligned} y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \\ (y_1 y' - y_1' y)' &= -p(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} = -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1' y' + y_1 y'' - y_1'' y - y_1' y' &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' - y_1'' y &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' - (-p(x) y_1' - q(x) y_1) y &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' + q(x) y_1 y &= -p(x) y_1 y' \\ y_1 (y'' + p(x) y' + q(x) y) &= 0. \end{aligned}$$

Tedy y je řešením rovnice 1.15. Dále upravama rovnice 1.16 dostanem

$$\begin{aligned} y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \\ \frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} &= \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2} \\ \left(\frac{y}{y_1} \right)' &= \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2} \\ \frac{y}{y_1} &= \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2(x)} dx \\ y &= y_1 \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Tedy jsme našli vzorec pro určení druhého řešení rovnice 1.15, které je lineárně nezávislé s řešením y_1 .

⁶Jelikož je y řešením lineární homogenní diferenciální rovnice, tak i cy je řešením této rovnice, takže volbou Wronskiánu v bodě x_0 měníme y maximálně o multiplikatívní konstantu.

Příklad 1.11 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$, víme-li, že má tato rovnice jedno řešení $y_1(x) = x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{y_1}\right)' &= \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^4} = \frac{e^{-\ln x}}{x^4} = \frac{1}{x^5} \\ \frac{y}{x^2} &= \int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \\ y &= -\frac{1}{4x^2}. \end{aligned}$$

Druhé řešení této rovnice je tedy $y_2 = \frac{1}{x^2}$ a obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme, že známe jedno nenulové řešení y_1 homogenní rovnice 1.13. Hledejme další řešení ve tvaru $y(x) = u(x)y_1(x)$, pak

$$\begin{aligned} y' &= u'y_1 + uy_1' \\ y'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \\ &\dots \\ y^{(n)} &= u^{(n)}y_1 + \binom{n}{1}u^{(n-1)}y_1' + \dots + uy_1^{(n)}. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} &u^{(n)}y_1 + b_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + b_1(x)u' + \\ &+ u(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) = 0, \end{aligned}$$

kde funkce $b_i(x)$ jdou vyjádřit pomocí funkcí $a_j(x)$ a řešení $y_1(x)$. Vydělením předešlé rovnice řešením y_1 dostaneme rovnici

$$u^{(n)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}u^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}u' = 0.$$

Použitím substituce $v(x) = u'(x)$ dostaneme lineární homogenní rovnici $(n-1)$ -ního řádu

$$v^{(n-1)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}v^{(n-2)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}v = 0.$$

Příklad 1.12 Vraťme se k předchozímu příkladu. Mějme rovnici $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$ a jedno její řešení $y_1(x) = x^2$.

Řešení: Užijeme substituci $y = uy_1$, dosadíme do rovnice, pak použijeme substituci $v = u'$ a vyřešíme rovnici.

$$\begin{aligned}
 y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} &= 0 \\
 u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + \frac{u'y_1 + uy_1'}{x} + \frac{-4uy_1}{x^2} &= 0 \\
 u''x^2 + 4u'x + 2u + \frac{u'x^2 + 2ux}{x} + \frac{-4ux^2}{x^2} &= 0 \\
 u''x^2 + 4u'x + u'x &= 0 \\
 v'x^2 + 5vx &= 0 \\
 v' &= \frac{-5v}{x} \\
 \frac{v'}{v} &= \frac{-5}{x} \\
 \ln|v| &= \ln|x^{-5}| \\
 v &= x^{-5}.
 \end{aligned}$$

Tedy $u = \int v dx = \frac{-1}{4x^4}$ a proto $y = uy_1 = \frac{-1}{4x^4}x^2 = \frac{-1}{4x^2}$. Tedy fundamentální systém této rovnice je $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x^2}$.

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (1.17)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pokusíme se najít řešení této rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, kde λ je nějaké číslo. Pak $y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$ a tedy po dosazení do rovnice 1.17 dostaneme

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \\
 \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} &= 0 \\
 \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Označme $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, pak poslední rovnici lze napsat ve tvaru $P(\lambda) = 0$. Tedy najdeme-li kořen λ polynomu $P(\lambda)$, pak $y(x) = e^{\lambda x}$ bude

řešením rovnice 1.17. Polynom $P(\lambda)$ se nazývá charakteristický polynom a rovnici $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ se říká charakteristická rovnice. Rovnice $P(\lambda) = 0$ má v komplexním oboru n kořenů⁷ (některé ale mohou být stejné, pak hovoříme o vícenásobných kořenech). Pokud je ale kořen $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexní, pak je řešení $y(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$ také komplexní. Lze snadno ověřit, že reálná část tohoto řešení $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ i imaginární část $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ jsou také řešením této rovnice.

Při určování řešení rovnice 1.17 pokračujeme následujícím způsobem.

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ jednonásobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak nám tento kořen dá jedno řešení ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ n -násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ ($n > 1$), pak nám tento kořen dá n nezávislých řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_n(x) = x^{n-1} e^{\lambda x}$.
- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ jednonásobný komplexní kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá dvě nezávislá řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$.⁸
- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ n -násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ ($n > 1$), kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá $2n$ nezávislých řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} \sin(\beta x), & y_3(x) &= x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, & y_{2n-1}(x) &= x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ y_2(x) &= e^{\alpha x} \cos(\beta x), & y_4(x) &= x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, & y_{2n}(x) &= x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Tímto způsobem získáme pro rovnici 1.17 n nezávislých řešení, které dohromady tvoří fundamentální systém rovnice 1.17.

Příklad 1.13 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0,$$

⁷Jde o přímý důsledek základní věty algebry, viz. přednáška v druhém semestru.

⁸Je třeba si uvědomit, že je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexním kořenech charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak i $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ je kořenem této rovnice, jelikož $P(\lambda)$ je polynom s reálnými koeficienty (viz. přednáška v druhém semestru). Tento druhý kořen nám ale dá stejnou dvojici řešení, jako kořen λ .

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Z toho dostaneme dvě nezávislá řešení $y_1(x) = e^{2x}$ a $y_2(x) = e^{-3x}$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Příklad 1.14 Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

tedy kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Dostaneme tedy dvě nezávislá řešení $y_1(x) = e^{2x} \sin(3x)$ a $y_2(x) = e^{2x} \cos(3x)$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} \sin(3x) + c_2 e^{2x} \cos(3x).$$

Příklad 1.15 Najděme obecné řešení rovnice $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)^2 = 0,$$

tedy dostaneme jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = -1$ a jeden trojnásobný kořen $\lambda_2 = 0$. Z toho dostáváme pět nezávislých řešení

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = x e^{-x}, y_3(x) = 1, y_4(x) = x, y_5(x) = x^2.$$

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2.$$

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty, variace konstant

Uvažujem rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (1.18)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Tak jako u lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu platí, že je-li $y_p(x)$ nějaké (partikulární) řešení nehomogenní rovnice 1.18 a $y_h(x)$ je řešením příslušné

homogenní rovnice 1.17, pak i $y(x) = y_p(x) + cy_h(x)$, $c \in \mathbb{R}$ je řešením nehomogenní rovnice 1.18. Stejně jako u rovnic prvního řádu bude tedy k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice stačit nalézt jedno (partikulární) řešení této rovnice a pak k němu přičíst obecné řešení příslušné homogenní rovnice 1.17. K nalezení partikulárního řešení použijeme variaci konstant. Nechť je y_1, \dots, y_n fundamentální systém příslušné homogenní rovnice, pak budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x).$$

Odvození si ukážeme na rovnici druhého řádu. Uvažujme rovnici

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

a y_1, y_2 jsou dvě nezávislá řešení rovnice $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Tedy $y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Abychom při výpočtu druhé derivace nedostali i druhé derivace funkcí c_1 a c_2 , přidáme podmínku

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

tedy

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \\ y'' &= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''. \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice a dostáváme

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) &= f(x) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Pro funkce c_1' a c_2' dostaneme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Uvědomme si, že determinant matice této soustavy je nenulový, jelikož je to wronskián $W(y_1, y_2)(x)$ a y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení homogenní rovnice. Tedy tato soustava má jedno řešení. Z této soustavy určíme funkce c_1' a c_2' a pak integrací i funkce c_1 a c_2 .

Příklad 1.16 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na příslušnou homogenní rovnici $y'' + 4y' + 3y = 0$. Dostaneme charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$, tedy řešení homogenní rovnice v obecném tvaru je

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Dále hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x)e^{-3x} + c_2(x)e^{-x}$. Dostaneme

$$y' = c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} - 3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}.$$

Přidáme podmínku $c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} = 0$ a dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= -3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x} \\ y'' &= -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 3y &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 4(-3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}) + 3(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}) &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} &= 0 \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Tedy $c_1' = -\frac{1}{2}$, $c_2' = \frac{1}{2}e^{-2x}$ a $c_1 = -\frac{x}{2}$ a $c_2 = -\frac{1}{4}e^{-2x}$, proto má partikulární řešení tvar $y_p(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} = e^{-3x}(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$ a obecné řešení

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -\frac{x}{2}e^{-3x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Rovnice se speciální pravou stranou

Předpokládejme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (1.19)$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a funkce f je ve tvaru $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n a m . Probereme nejdříve jednodušší varianty pravé strany.

1. Necht $f(x) = P_m(x)$ je polynom stupně m a 0 je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.19 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m .

Příklad 1.17 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y = x$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 4y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 0 \\ \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2 \\ y_h(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 4y = x$. Hledáme ho ve tvaru $y(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y'' &= 0 \\ y'' - 4y &= x \\ -4(ax + b) &= x \\ y_p(x) &= -\frac{1}{4}x. \end{aligned}$$

III. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{4}x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Příklad 1.18 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = 4x$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 2y' = 0$.

$$\begin{aligned} y'' - 2y' &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda &= (\lambda - 2)\lambda = 0 \\ \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 2 \\ y_h(x) &= C_1 + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 2y = 4x$. Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$.

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx \\y' &= 2ax + b \\y'' &= 2a \\y'' - 2y' &= 4x \\2a - 2(2ax + b) &= 4x \\a = -1, b &= -1 \\y_p(x) &= -x^2 - x.\end{aligned}$$

III. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -x^2 - x + C_1 + C_2e^{2x}.$$

2. Necht $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m , a $\alpha \in \mathbb{R}$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.19 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k e^{\alpha x}$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m .

Příklad 1.19 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = e^{2x}$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 2y' = 0$, což je $y_h(x) = C_1 + C_2e^{2x}$. (viz. předchozí příklad)

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 2y' = e^{2x}$. Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = axe^{2x}$.

$$\begin{aligned}y &= axe^{2x} \\y' &= ae^{2x}(1 + 2x) \\y'' &= 4ae^{2x}(1 + x) \\y'' - 2y' &= e^{2x} \\4ae^{2x}(1 + x) - 2ae^{2x}(1 + 2x) &= e^{2x} \\2a &= 1 \\y_h(x) &= \frac{1}{2}xe^{2x}.\end{aligned}$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x}{2}e^{2x} + C_1 + C_2e^{2x}.$$

3. Necht $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos(\beta x) + Q_l(x) \sin(\beta x))$, kde $P_m(x)$ a $Q_l(x)$ je polynom stupně m resp. l , a $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 1.19 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = x^k e^{\alpha x}(\hat{P}_s(x) \cos(\beta x) + \hat{Q}_s(x) \sin(\beta x))$, kde $\hat{P}_s(x)$ a $\hat{Q}_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně $s = \max\{m, l\}$.

Poznámka 1.5 *I když je na pravé straně jen kosinus (nebo jen sinus), tak je třeba hledat řešení ve tvaru jak se sinem tak i kosinem. Všimněme si, že tento poslední případ v sobě obsahuje oba předešlé případy. Pro $\alpha = \beta = 0$ dostaneme první případ, pro nenulové α a $\beta = 0$ dostáváme druhý případ.*

Příklad 1.20 Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = e^x \sin(2x)$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 4y = 0$.

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= 0 \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2i \\ y_h(x) &= C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).\end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' + 4y = e^x \sin(2x)$. Jelikož $1 + 2i$ není kořenem charakteristického polynomu, hledáme řešení ve tvaru $y(x) = e^x(a \sin(2x) + b \cos(2x))$

$$\begin{aligned}y &= e^x(a \sin(2x) + b \cos(2x)) \\ y' &= e^x(a \sin(2x) + 2a \cos(2x) + b \cos(2x) - 2b \sin(2x)) \\ &= e^x((a - 2b) \sin(2x) + (2a + b) \cos(2x)) \\ y'' &= e^x((a - 2b - 4a - 2b) \sin(2x) + (2a + b + 2a - 4b) \cos(2x)) \\ &= e^x((-3a - 4b) \sin(2x) + (4a - 3b) \cos(2x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= e^x \sin(2x) \\
e^x((-3a - 4b + 4a) \sin(2x) + (4a - 3b + 4b) \cos(2x)) &= e^x \sin(2x) \\
a - 4b &= 1 \\
4a + b &= 0 \\
a &= \frac{1}{17} \\
b &= \frac{-4}{17}
\end{aligned}$$

$$y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{17} \sin(2x) - \frac{4}{17} \cos(2x) \right)$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = e^x \left(\frac{1}{17} \sin(2x) - \frac{4}{17} \cos(2x) \right) + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Kapitola 2

Nekonečné číselné řady

Opakování

Definice 2.1 Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazveme n -tý částečný součet řady a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů.

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s .

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Divergentní řady dále dělíme na tři případy:

- Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, řekneme, že řada diverguje k $+\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,
- je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada diverguje k $-\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$,
- jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada osciluje.

Definice 2.2 Řada se nazývá omezená, je-li posloupnost $\{s_n\}$ omezená.

Věta 2.1 Konvergentní řada je omezená.

Věta 2.2 (nutná podmínka konvergence) Je-li $\sum a_n$ konvergentní, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Poznámka 2.1 Na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.

2.1 Řady s nezápornými členy

Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.

Věta 2.3 Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.

2.1.1 Kritéria konvergence

Věta 2.4 (srovnávací kritérium) Necht' $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:

- Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_i$, tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 2.5 (limitní srovnávací kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ a $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.

Věta 2.6 (Odmocninové kritérium - Cauchyho) Necht' $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq 0$.

- a) i) Jestliže existuje $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

b) Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

- i) Je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
ii) Je-li $q > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 2.7 (Podílové kritérium - d'Alembertovo) Necht' $a_n \geq 0$.

- i) Jeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

ii) Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak:

- je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- je-li $q > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 2.8 (Raabeovo kritérium) Necht $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

- i) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- ii) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz

- i) Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a n_0 takové, že $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &> 1 + \varepsilon, \\ n(a_n - a_{n+1}) &> a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}, \\ na_n - (n+1)a_{n+1} &> \varepsilon a_{n+1}, \\ \frac{1}{\varepsilon}(na_n - (n+1)a_{n+1}) &> a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i < a_1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\varepsilon} ((i-1)a_{i-1} - ia_i) \right) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon} (a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} - na_n) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon} (a_1 - na_n) \leq a_1 + \frac{1}{\varepsilon} a_1. \end{aligned}$$

Jelikož posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a omezená, je také konvergentní. Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ pro všechna $n > n_0$. Pak

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &< 1 \\ na_n - na_{n+1} &< a_{n+1} \\ na_n &< (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Dostáváme $(n_0+1)a_{n_0+1} < (n_0+2)a_{n_0+2} < \dots < na_n$ a tedy $a_n > \frac{1}{n}(n_0+1)a_{n_0+1}$. Proto

$$\sum_{i=n_0+1}^n a_i > \sum_{i=n_0+1}^n \frac{1}{i}(n_0+1)a_{n_0+1} = (n_0+1)a_{n_0+1} \sum_{i=n_0+1}^n \frac{1}{i}.$$

Z divergence harmonické řady a věty 2.4 plyne divergence řady $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ a tedy i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Příklad 2.1 Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a}{n+1} = a. \end{aligned}$$

Je-li tedy $a > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pro $a \in (0, 1)$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pro $a = 1$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, což je harmonická řada bez prvního členu a tedy řada divergentní.

Poznamenejme, že v této úloze by nám nepomohlo d'Alembertovo kritérium, jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Příklad 2.2 Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{(n+1)^k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^k - n^k}{n^k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} (e^{k \ln(n+1)} - e^{k \ln n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} \cdot e^{k \ln n} (e^{k(\ln(n+1) - \ln n)} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{e^{k(\ln(1 + \frac{1}{n}))} - 1}{k(\ln(1 + \frac{1}{n}))} \cdot \frac{k(\ln(1 + \frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = k. \end{aligned}$$

Tedy pro $k > 1$ řada konverguje a pro $k < 1$ řada diverguje.

Věta 2.9 (Integrální kritérium) Nechť je funkce f nerostoucí, nezáporná a definovaná na intervalu $[1, \infty)$. Pokud $a_n = f(n) \forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$.

Důkaz

f je nerostoucí, tedy $f(n-1) \geq f(x) \geq f(n) \forall x \in [n-1, n]$. Dále dostaneme

$$\begin{aligned} f(n-1) &= \int_{n-1}^n f(n-1) dx \geq \int_{n-1}^n f(x) dx && \geq \int_{n-1}^n f(n) dx = f(n) \\ \sum_{n=2}^k f(n-1) &\geq \sum_{n=2}^k \int_{n-1}^n f(x) dx && \geq \sum_{n=2}^k f(n) \\ \sum_{n=1}^k f(n) &\geq \int_1^k f(x) dx && \geq \sum_{n=2}^k f(n) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k f(n) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x) dx && \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^k f(n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x) dx && \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Z první nerovnosti dostaneme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konvergentní) $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Z druhé nerovnosti dostaneme: $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty$ a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Příklad 2.3 Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

kde $\alpha \neq 1$.

Řešení: Zavedeme funkci $f(x) = \frac{1}{x^k}$, pak funkce f splňuje pro $k > 0$ podmínky věty 2.9. Dostaneme

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x^{-k}dx = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}$$

tedy $\int_1^{\infty} f(x)dx = -\frac{1}{1-k}$ pro $k > 1$ a $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ pro $k \in (0, 1)$.

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ diverguje pro $k = 1$ (jde o harmonickou řadu) a pro $k \leq 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} \neq 0^1$, tak dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.

2.2 Řady s obecnými členy

Definice 2.3 Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně.

Věta 2.10 (Bolzano-Cauchyova podmínka) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} \right| < \varepsilon$.

Důkaz Jde o přímý důsledek definice a Bolzano-Cauchyho věty pro posloupnosti.

□

Věta 2.11 Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, tak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

¹neni splněna nutná podmínka konvergence viz. věta 2.2

Důkaz Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak dle předchozí věty 2.10 platí: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |\sum_{i=1}^p a_{n+i}| \leq |\sum_{i=1}^p |a_{n+i}|| < \varepsilon$. Tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje BC podmínku a je také konvergentní. □

Věta 2.12 (*Leibnitzovo kritérium*) *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:*

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Důkaz $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, tedy je posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající.

Jelikož

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned}$$

je navíc posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a tedy konvergentní. Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = A,$$

tedy je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. □

Lemma 2.13 *Mějme posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a čísla $n, p \in \mathbb{N}$, $n < p$. Označme $\beta_k = \sum_{i=1}^k b_i$. Pak*

$$\sum_{k=n+1}^p a_k b_k = \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + \beta_p a_{p+1} - \beta_n a_{n+1}. \quad (2.1)$$

Důkaz

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^p a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^p a_k (\beta_k - \beta_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} \beta_k = \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \left(a_{n+1} \beta_n - a_{p+1} \beta_p + \sum_{k=n+1}^p a_{k+1} \beta_k \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n. \end{aligned}$$

□

Věta 2.14 (Abelovo-Dirichletovo kritérium) Necht $\{a_n\}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:

1. (Dirichlet) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty.
2. (Abel) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní a posloupnost $\{a_n\}$ je omezená.

Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Důkaz

1. Použijeme B-C podmínku (věta 2.10) a předchozí lemma. Stejně jako v přechodím lemmatu používáme značení $\beta_k = \sum_{i=1}^k b_i$. Jelikož má řada $\sum b_n$ omezené částečné součty, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|\beta_k| < M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. BÚNO předpokládáme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p |\beta_k (a_k - a_{k+1})| + |a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n| \\
&= \sum_{k=n+1}^p |\beta_k| (a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p M (a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1} \beta_p| + |a_{n+1} \beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p M (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} M + a_{n+1} M \\
&= M (a_{n+1} - a_{p+1} + a_{p+1} + a_{n+1}) = 2M a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Tedy pro $n_0 < n < p$ platí:

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| < 2M\varepsilon,$$

a proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní (dle věty 2.10).

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, označme tedy její součet $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z rovnosti $\sum_{k=n+1}^p (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{p+1}$ dostaneme rovnost

$$0 = \sum_{k=n+1}^p \beta(a_k - a_{k+1}) + \beta a_{p+1} - \beta a_{n+1}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^p \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^p (\beta_k - \beta)(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)| \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta|. \end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, tak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\beta - \beta_k| < \varepsilon$ pro všechna $k > n_0$. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|a_n| < M$. Tedy pro $n, p > n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta| \\ &< \left| \sum_{k=n+1}^p \varepsilon(a_k - a_{k+1}) \right| + \varepsilon|a_{p+1}| + \varepsilon|a_{n+1}| \\ &\leq \varepsilon(|a_{n+1} - a_{p+1}| + |a_{p+1}| + |a_{n+1}|) \leq 2\varepsilon(|a_{p+1}| + |a_{n+1}|) < 4\varepsilon M. \end{aligned}$$

Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (dle věty 2.10).

□

Příklad 2.4 Necht $a_n > 0$, $\{a_n\}$ je nerostoucí a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ukažme, že pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ konvergují.

Nejdříve ukážeme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty. Mějme geometrickou řadu s kvocientem $e^{ix} = \cos(x) +$

$i \sin(x)$. Pak $s_n = \sum_{i=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$, tedy

$$\begin{aligned} |s_n| &= \left| e^{ix} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \right| = |e^{ix}| \frac{|1-e^{inx}|}{|1-e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} = \frac{2|1-e^{-ix}|}{|(1-e^{ix})(1-e^{-ix})|} \\ &\leq \frac{4}{|2-e^{ix}-e^{-ix}|} = \frac{2}{|1-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}|} = \frac{2}{|1-\cos(x)|}. \end{aligned}$$

Je-li $x \neq 2k\pi$, tak $|s_n| \leq \frac{2}{|1-\cos(x)|} < \infty$. Jelikož $s_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx) + \sum_{k=1}^n \sin(kx)$, tak $|\sum_{k=1}^n \cos(kx)| \leq |s_n|$ a $|\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq |s_n|$, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty.

Dále už jen stačí aplikovat Dirichletovo kritérium.

Speciálně řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ pro $x \neq 2\pi$ konvergují, ale nejsou absolutně konvergentní.

2.2.1 Přerovnávání řad

Definice 2.4 Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace množiny \mathbb{N} ($\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 2.15 Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním této řady a jejich součet je stejný (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$).

Důkaz

Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_p| < \varepsilon$ pro každé $p > n \geq n_0$ (viz. věta 2.10). Jelikož $\{k_n\}$ je permutace množiny \mathbb{N} , tak existuje $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1, 2, \dots, n_0\} \subset \{k_1, k_2, \dots, k_{\hat{n}_0}\}$. Je-li $\hat{p} > \hat{n} > \hat{n}_0$ a označme $p = \max\{k_{\hat{n}}, k_{\hat{n}+1}, \dots, k_{\hat{p}}\}$, pak $|a_{k_{\hat{n}}}| + |a_{k_{\hat{n}+1}}| + \dots + |a_{k_{\hat{p}}}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots + |a_p| < \varepsilon$, tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konvergentní.

Nyní dokážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$. Necht $n > \max\{n_0, \hat{n}_0\}$ a označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^n a_{k_i}$. pak

$$\begin{aligned} |s_n - \hat{s}_n| &= |a_1 + a_2 + \dots + a_n - (a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n})| \\ &\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots + |a_q| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $q = \max\{n, k_1, \dots, k_n\}$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - \hat{s}_n| = 0$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

□

Označme $a^+ = \max\{0, a\}$ a $a^- = \max\{0, -a\}$. Pak $a = a^+ - a^-$ a $|a| = a^+ + a^-$. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečné řada, tak můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Lemma 2.16 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.*

Důkaz

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jsou řady s nezápornými koeficienty, tak každá z těchto řad buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.

Kdyby obě konvergovaly, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ a tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně.

Pokud by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergovala k $+\infty$, pak by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = A \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = +\infty$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K \in \mathbb{R}$ by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $A - \varepsilon < s_n^+ < A + \varepsilon$ a $s_n^- > K$ $\forall n > n_0$. Tedy

$$s_n = s_n^+ - s_n^- < A - K + \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Proto by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n^+ - s_n^-) = -\infty.$$

Tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala. Stejně by se ukázalo, že pro konvergentní řadu nemůže nastat aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergovala k $+\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergovala.

Proto obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.

□

Věta 2.17 (Riemannova) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a necht $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$ a takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ osciluje.*

Důkaz

- Necht je $s \in \mathbb{R}$. Označme n_1 nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ > s$ (jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, tak takové n_1 existuje). Označme m_1 nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_1} a_i^- < s$. Dále pro $k = 2, 3, \dots$ označme n_k nejmenší $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} a_i^- > s$ a m_k nejmenší $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_k} a_i^- < s$. Tato konstrukce nám vytvoří řadu

$$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - (a_{m_1+1}^- + \dots) + \dots,$$

kteřá vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označme \hat{s}_n součet takto přerovnané řady, pak částečný součet $\hat{s}_{n_1+m_1+\dots+n_k}$ se od s liší maximálně o $a_{n_k}^+$ a částečný součet $s_{n_1+m_1+\dots+m_k}$ se od s liší maximálně o $a_{m_k}^-$. Podobně částečný součet \hat{s}_n , kde $n_1 + m_1 + \dots + n_k < n < n_1 + m_1 + \dots + m_k$ se od s liší maximálně o $\max\{a_{n_k}^+, a_{m_k}^-\}$ a obdobně pro $n_1 + m_1 + \dots + m_k < n < n_1 + m_1 + \dots + n_{k+1}$ je $|s_n - s| \leq \max\{a_{n_{k+1}}^+, a_{m_k}^-\}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a proto je $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = s$.

- Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$. Stačí třeba zvolit následující přerovnání. $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší n_1 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ > 1$. $n_2 > n_1$ je nejmenší n_2 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ > 2$, $n_3 > n_2$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - a_2^- + a_{n_2+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ > 3$ a tak dál. Dále postupujeme jak v předchozí části důkazu.
- Pro přerovnávání do oscilující řady stačí, aby n_1 bylo nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ > 1$, m_1 nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) < -1$, $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ > 1$ a tak dále.

□

2.2.2 Novoroční hraní

Příklad 2.5 *Následující příklad lze hojně nalézt na internetu. Poznamenejme hned na začátku, že uvedený postup je špatně.*

Ukažme, že součet $1 + 2 + 3 + \dots$ je $-\frac{1}{12}$.

- *Krok I. Označme S_3 součet řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ Pak*

$$\begin{aligned} S_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\ S_3 &= 0 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ 2S_3 &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{aligned}$$

Tedy $S_3 = \frac{1}{2}$.

- *Krok II. Označme S_2 součet řady $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$ Pak*

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \\
S_2 &= 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \\
2S_2 &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S_3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Tedy $S_2 = \frac{1}{4}$.

- *Krok III. Označme S_1 součet řady $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ Pak*

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \\
-S_2 &= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots \\
S_1 - S_2 &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + \dots
\end{aligned}$$

Vynecháním nulových členů dostaneme

$$S_1 - S_2 = +4 + 8 + 12 + 16 \dots = 4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots) = 4S_1$$

Z této rovnosti dostaneme $S_1 = -\frac{S_2}{3} = -\frac{1}{12}$.

Ani jedna z řad S_1 , S_2 a S_3 nesplňuje nutnou podmínku konvergence, tedy nemohou konvergovat (mít konečný součet). Ve skutečnosti řada S_3 diverguje k nekonečnu (což lze lehce ukázat přímo z definice). Položme si tedy následující otázky:

- Kde je v krocích I-III chyba?
- Může mít některý ze získaných výsledku aspoň nějaký smysl?

Podívejme se nejdříve na první řadu $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ a na její částečné součty (označme je s_n): $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \dots$, tedy sudé částečné součty jsou rovny nule a liché jedné. Řada tedy osciluje. Pokud ale máme všechny sudé částečné součty rovny nule a liché rovny jedné, pak „průměrný“ částečný součet bude roven polovině, což je výsledek, který jsme získali v prvním kroku.

Pojďme tuto myšlenku trochu formalizovat. Jelikož nelze určit průměr z nekonečné řady čísel (všech částečných součtů), budeme postupovat následujícím způsobem. Zavedeme nový součet řady jako limitu průměru prvních n částečných součtů.

Definice 2.5 (*Cesàrova sumace*) *Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ její částečné součty. Existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

pak její hodnotu nazveme Cesàrovým součtem této řady a budeme ho značit $(C) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Můžeme vyslovit následující větu o klasickém součtu a Cesàrově součtu řady

Věta 2.18 Necht je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (C) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $|s_n - A| < \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} - A \right| &\leq \left| \frac{s_1 - A + s_2 - A + \dots + s_{n_0} - A}{n} \right| + \frac{|s_{n_0+1} - A| + \dots + |s_n - A|}{n} \\ &\leq \left| \frac{s_1 - A + s_2 - A + \dots + s_{n_0} - A}{n} \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Označme $K = |s_1 - A + s_2 - A + \dots + s_{n_0} - A|$, pak

$$\left| \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} - A \right| \leq \frac{K}{n} + \varepsilon$$

tedy $(C) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. □

Ukázali jsme si, že řada S_3 má skutečně Cesàrův součet roven $\frac{1}{2}$. Byla ale náhoda, že jsem tento výsledek získali v kroku I.? Platí, že úpravy provedené v prvním kroku zachovávají Cesàrův součet? Zformulujeme tuto otázku přesněji.

Uvažujme $p \in \mathbb{N}$ a označme $a_{1-p} = 0, a_{2-p} = 0, \dots, a_0 = 0$. Je-li $(C) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, platí rovnost $(C) - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-p}) = 2A$?

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_{1-p}) + (a_1 + a_2 + a_{1-p} + a_{2-p}) + \dots + (a_1 + \dots + a_n + a_{1-p} + a_{n-p})}{n} = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + (a_1 + a_2) + \dots + (a_1 + \dots + a_n)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{1-p} + (a_{1-p} + a_{2-p}) + \dots + (a_{1-p} + \dots + a_{n-p})}{n} = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_{n-p}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_{n-p}}{n-p} \cdot \frac{n-p}{p} = \\ &A + A = 2A. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že pro řadu s konečným Cesàrovým součtem jsou úpravy v prvním kroku v pořádku. Tedy není náhodou, že nám vyšel „správný“ výsledek (z pohledu Cesàrova součtu).

Podívejme se nyní na druhý krok. Částečné součty řady S_2 jsou $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$, tedy sudé částečné součty divergují k $-\infty$ a liché k $+\infty$. Podívejme se na Cesàrův součet. Pro n sudé je $\frac{s_1+s_2+\dots+s_n}{n} = \frac{0}{n} = 0$, pro liché $\frac{s_1+\dots+s_n}{n} = \frac{s_n}{n} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{n+1}{4}$, tedy řada nemá ani Cesàrův součet. Ale průměr těchto limit je právě $\frac{1}{4}$. Je to náhoda? Neexistuje nějaký „rozumný“ způsob, jak tuto řadu sečíst?

Zkusme rozvinout myšlenku, která vedla v Cesàrovu součtu. Zavedeme si následující značení:

$$\begin{aligned} s_n^0 &= s_n, \\ s_n^1 &= s_1 + s_2 + \dots + s_n, \\ s_n^2 &= s_1^1 + s_2^1 + \dots + s_n^1 = s_1 + (s_1 + s_2) + \dots + (s_1 + \dots + s_n) = ns_1 + (n-1)s_2 + \dots + s_n. \end{aligned}$$

Tedy pokud jsme součet $s_n^1 = s_2 + \dots + s_n$ dělili číslem n , pak je třeba součet $s_n^1 = ns_1 + (n-1)s_2 + \dots + s_n$ dělit číslem $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Tedy můžeme zavést Cesàrův součet druhého řádu.

$$(C, 2) - \sum_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns_1 + (n-1)s_2 + \dots + s_n}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

pokud je limita vpravo konečná.

Lze ukázat, že pro řadu s konečným Cesàrovým součtem platí $(C) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (C, 2) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Také lze stejným způsobem zavést Cesàrův součet vyššího řádu.

Vratme se tedy k řadě S_2 . Má tato řada Cesàrův součet druhého řádu?

$$\begin{aligned} \{s_n\} &= 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots \\ \{s_n^1\} &= 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots \\ \{s_n^2\} &= 1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, \dots \end{aligned}$$

Tedy máme $s_{2n-1}^2 = s_{2n}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2n}^2}{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \frac{1}{4}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2n-1}^2}{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{4}$$

tedy $(C, 2) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4}$. Tedy výsledek získaný ve druhém kroku má také jistý smysl (z hlediska Cesàrova součtu druhého řádu). Opět by šlo ukázat, že úpravy v druhém kroku mají smysl pro řadu, která má konečný Cesàrův součet druhého řádu.

Podívejme se na poslední krok. Tak jsme vlastně dali do rovnosti řady $0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots$ a $4 + 8 + 12 + \dots$. Obě tyto řady divergují do nekonečna, ale ne stejně rychle. Sečteme-li prvních $2n$ členů těchto řad, dostaneme

$$0 + 4 + 0 + 8 + 0 + \dots + 4n = 4 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4 + 8 + \dots + 8n = 4 \frac{2n(2n+1)}{2}$$

Po odebrání nul tedy řada roste přibližně čtyřikrát rychleji, a proto si nemůžeme dovolit krok

$$S_1 - S_2 = 0 + 4 + 0 + 8 + \dots = 4 + 8 + 12 \dots = 4S_1$$

jelikož řada na levé straně diverguje k nekonečnu čtyřikrát pomaleji než řada vpravo, která vznikla odebráním nul. Takže když v této „rovnosti“ odečteme S_1 , tak vlastně odečítáme z každé strany něco jiného.

Zmíníme poslední argument, který hovoří pro smysl součtu $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$. Tím je takzvaná Riemannova zeta-funkce. Uvažujme komplexní funkce $\zeta_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Tato funkce se nazývá Eulerova zeta-funkce a je definovaná pro komplexní čísla $x \in \mathbb{C}$, které mají reálnou složku větší než jedna. Riemannova zeta-funkce $\zeta(x)$ je definována jako analytické prodloužení Eulerovy zeta-funkce na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Analytické prodloužení si můžeme velmi volně představit jako prodloužení funkce takové, že v celém definičním oboru původní funkce zachovává stejné hodnoty a navíc jde o hladké prodloužení. Lze dokázat, že pro hladkou komplexní funkci je takové prodloužení určeno jednoznačně. Rovněž lze ukázat, že $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

Ukažme si, co by se stalo, pokud $x = -1$ zkusíme dosadit do předpisu pro Eulerovu zeta-funkci (připomeňme, že v bodě $x = -1$ není tato funkce definovaná). Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$. Je tedy náhoda, že nám vyšel součet $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$, když je to hodnota Riemannovy zeta-funkce v bodě $x = -1$ a při dosazení $x = -1$ do řady určující Eulerovu zeta-funkci (i když v tomto bodě není tato funkce definovaná) dostaneme řadu $1 + 2 + 3 + \dots$?

Podívejme se na následující postup pro nalezení součtu řady $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots$

$$\begin{aligned}
S_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
S_4 &= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\
S_3 + S_4 &= 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + \dots = 2(1 + 1 + 1 + 1 + \dots) = 2S_4, \\
\frac{1}{2} &= S_3 = S_4.
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\
S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \\
S_1 + S_2 &= 2 + 0 + 6 + 0 + \dots = 2 + 6 + 10 + \dots = 2(1 + 3 + 5 + \dots) \\
&= 2(2S_1 - S_4) = 4S_1 - 2S_4
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = S_2 + 2S_4 = 3S_1.$$

Tedy $S_1 = \frac{5}{12}$. Jak vidíme, podobným postupem jako v příkladu 2.5 dostaneme jiný výsledek součtu řady $1 + 2 + 3 + \dots$, tedy to, že nám vyšel zrovna výsledek $-1/12$, je náhoda. Nebo to byl možná záměr autora, který tento postup vymyslel, kdo ví... :-)