Kapitola 1

Bodová a stejnoměrná konvergence

Motivační otázky:

$$1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Můžeme tuto rovnici derivovat? Tj. platí

$$1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}?$$

Kdy lze zaměnit limitu a derivaci?
Je limita spojitých funcí spojitá funkce?

Příklad 1.1 *Nechť $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$. Pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je funkce daná předpisem $f(x) = 0$ pro $x \in [0,1)$ a $f(1) = 1$. Tedy v tomto případě limita spojitých funkcí není spojitá funkce.*

Definice 1.1 *Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f_n konvergují k funkci f bodově na množině M, jestliže $\forall x \in M$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Značíme $f_n \underset{M}{\to} f$.*

Definice 1.2 *Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f_n konvergují k funkci f stejnoměrně na množině M, jesliže*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$ (je-li množina M zřejmá z kontextu, tak používáme značení $f_n \rightrightarrows f$, nebo jen $f_n \rightrightarrows$).

Řekneme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x)$ konverguje stejnoměrně na M k $S(x)$, jestliže posloupnost jejich částečných součtů $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$ konverguje stejnoměrně k $S(x)$ na M.

Poznámka 1.1 *f_n konvergují k funkci f bodově na množině M $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in M$ $\exists n_o \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 :$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Rozdíl je v prohození pořadí $\forall x$ a $\exists n_0$. Zatímco u stejnoměrné konvergence volba n_0 nezávisí na bodu x (je pro všechna x stejná), u bodové konvergence záviset může.*

Poznámka 1.2

- $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{M}{\rightarrow} f$,
- $f_n \underset{M_1}{\rightrightarrows} f$ *a* $f_n \underset{M_2}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{M_1 \cup M_2}{\rightrightarrows} f$.

  Pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1$ $\forall x \in M_1 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ a $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_2$ $\forall x \in M_2 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$ $\forall x \in M_1 \cup M_2 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Cvičení 1.1 *Nechť $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$. Jsou-li všechny f_n na M omezené, je také f na M omezená. Dokažte.*

Věta 1.1 *Nechť $f_n \underset{M}{\rightarrow} f$. Označme $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$.*
Pak $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz

($\Leftarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $x \in M$ a každé $n > n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, a proto f_n konverguje k f stejnoměrně.

($\Rightarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ a $\forall x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $\sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$\square$

Věta 1.2 (B.C. podmínka pro $\rightrightarrows$) *Posloupnost funkcí f_n je stejnoměrně konvergentní na M (existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$) právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > n_0$ $\forall x \in M$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (Bolzano-Cauchyova podmínka).*

Důkaz

($\Rightarrow$) Je-li posloupnost f_n stejnoměrně konvergentní na M, pak existuje funkce f taková, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in M$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_o, \forall x \in M. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Nejprve ukážeme bodovou konvergenci (tj. existenci limitní funkce f). Zvolme $x \in M$, pak platí B.C. podmínka pro posloupnost $f_n(x)$ (posloupnost reálných čísel), a proto je tato posloupnost konvergentní. Označme $f(x)$ její limitu.

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n, m > n_0$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (B.C. podmínka). Tedy pro $n > n_0$ a libovolné $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \to \infty} f_m(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 1.3 (Weierstrassova) *Nechť $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x \in M$ platí $|v_i(x)| \leq w_i(x)$. Pak $\sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \rightrightarrows \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |v_i(x)| \rightrightarrows$ a $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \rightrightarrows$.*

Důkaz $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \rightrightarrows$ právě tehdy, když platí B.C. podmínka pro posloupnost částečných součtů $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m > n > n_0\ \forall x \in M$ platí $|\sum_{i=1}^{n} w_i(x) - \sum_{i=1}^{m} w_i(x)| = |w_{n+1}(x) + w_{n+2}(x) + ... + w_m(x)| < \varepsilon$ ($\sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \rightrightarrows$ a tedy platí B.C. podmínka). Jelikož

$$|v_{n+1}(x) + ... + v_m(x)| \leq |v_{n+1}(x)| + ... + |v_m(x)| \leq |w_{n+1}(x) + w_{n+2}(x) + ... + w_m(x)| < \varepsilon,$$

tak platí B.C. podmínka i pro $\sum_{i=1}^{n} |v_i(x)|$ a $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$ a tedy jsou obě řady stejnoměrně konvergentní.

$\square$

Věta 1.4 *Nechť f_n je posloupnost funkcí a platí:*

i) $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$,

ii) existuje vlastní limita $\lim_{x \to b_-} f_n(x)$, *označme tuto limitu* F_n.

Pak

a) Existuje vlastní limita $F = \lim_{n \to \infty} F_n$, *b) existuje vlastní limita* $\lim_{x\to b_-} f(x)$ *a platí* $\lim_{x\to b_-} f(x) = F$.

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} f_n(x) = \lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz

a) Jelikož $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows}$, tak platí B.C. podmínka, tedy pro každé $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_0\ \forall x \in (a,b) : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$|F_n - F_m| = |\lim_{x\to b_-} f_n(x) - \lim_{x\to b_-} f_m(x)| = \lim_{x\to b_-} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

tedy platí B.C. podmínka i pro posloupnost reálných čísel F_n, a proto je tato posloupnost konvergentní, tedy existuje vlastní limita $F = \lim_{n\to\infty} F_n$.

b) Zvolme $\varepsilon > 0$. Z bodů i), ii) a a) postupně máme, že

- $\exists n_0^1 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0^1\ \forall x \in (a,b)\ : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- pro kažné $n \in \mathbb{N}\ \exists \delta_n > 0\ \forall x \in (b - \delta_n, b) : |f_n(x) - F_n| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\exists n_0^2 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0^2 : |F_n - F| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pro $n^3 > \max\{n_0^1, n_0^2\}$ a $\forall x \in (b - \delta_{n^3}, b)$ dostaneme

$$\begin{aligned} |f(x) - F| &= |f(x) - f_{n^3}(x) + f_{n^3}(x) - F_{n^3} + F_{n^3} - F| \\ &\leq |f(x) - f_{n^3}(x)| + |f_{n^3}(x) - F_{n^3}| + |F_{n^3} - F| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to b_-} f(x) = F$.

□

Důsledek 1.5 *Nechť* f_n *jsou spojité funkce na intervalu* (a,b) *a* $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$. *Pak* f *je spojitá na* (a,b).

Důkaz Zvolme $c \in (a,b)$, pak dle věty 1.4 platí $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c).$$

□

Věta 1.6 *Nechť f_n je posloupnost reálných funkcí, které mají na intervalu J vlastní derivaci. Nechť dále platí:*

i) Existuje bod $x \in J$ takový, že $f_n(x)$ je konvergentní.

ii) $f'_n \underset{J}{\rightrightarrows}$.

Označme $g = \lim_{n\to} f'_n$, pak

a) Existuje funkce f na J taková, že $f_n \to f$ na intervalu J a tato konvergence je navíc stejnoměrná na každé omezené podmnožině $J_o \subset J$.

b) $f' = g$ na J. Jinak zapsáno

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Důkaz

a) Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v $x_0 \in J_o \subset J$ a J_o je omezená množina. Označme $K = \sup_{x\in J_o} |x - x_0|$, pak pro libovolné $x \in J_o$ dostaneme

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&= |[f'_n(\xi) - f'_m(\xi)](x - x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|K + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,
\end{aligned}$$

kde $\xi \in (x, x_0)$ (nebo $\xi \in (x_0, x)$). Pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0^1 \in \mathbb{N}$ takové, že $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechny $n, m > n_0^1$ a existuje $n_0^2 \in \mathbb{N}$ takové, že $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2K}$[1] pro všechny $n, m > n_0^2$. Tedy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

pro všechna $n, m > \max\{n_0^1, n_0^2\}$ a pro všechna $x \in J_o$. Tedy posloupnost $\{f_n(x)\}$ splňuje B.C. podmínku a proto je stejnoměrně konvergentní na J_o.

[1] Jelikož ξ je z omezené podmnožiny intervalu J a f'_n konverguje na omezené podmnožině stejnoměrně a tak pro něj platí B.C. podmínka viz věta 1.2

b) Nechť $x \in J$ a označme $\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}$, pak $f_n'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi_n(h)$. Ukažme nejdříve stejnoměrnou konvergenci funkcí φ_n. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\tilde{h} > 0$, pak

$$\begin{aligned} |\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| &= \frac{1}{h}|f_n(x+h) - f_n(x) - (f_m(x+h) - f_m(x))| \\ &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

pro všechny $n, m > n_0$ a všechny $h \in (0, \tilde{h})$, kde $\xi \in (0, h)$. Tedy $\varphi_n \rightrightarrows$ dle věty 1.2. S použitím věty 1.4 dostaneme

$$\begin{aligned} g = \lim_{n\to\infty} f_n' &= \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x). \end{aligned}$$

□

Příklad 1.2 *Bodová konvergence v alespoň jednom bodě x_0 v předchozí větě je podstatná. Nechť $f_n(x) = x + n$, pak $f_n'(x) = 1$, tedy $f_n'(x) \rightrightarrows 1$, ale přesto $f_n(x)$ nekonverguje.*

Věta 1.7 (limita a Riemannův integrál) *Nechť $f_n(x)$ mají na $[a, b]$ Riemannův integrál a $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sigma_n dx = \lim_{n\to\infty} (b-a)\sigma_n = 0. \end{aligned}$$

V poslední rovnosti využíváme větu 1.1.

□

Poznámka 1.3 *Leibnizovo kritérium a Abel-Dirichletovo kritérium platí i pro stejnoměrnou konvergenci řad, pokud v předpokladech nahradíme konvergenci stejnoměrnou konvergencí a omezenost stejnoměrnou omezeností. Kde stejnoměrnou omezeností funkcí* $f_n(x)$ *na množině myslíme, že existuje* $K \in \mathbb{R}$ *takové, že pro všechny* $x \in M$ *a všechny* $n \in \mathbb{N}$ *je* $|f_n(x)| < K$.

Kapitola 2

Mocninné řady v $\mathbb{C}$

Definice 2.1 *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě z_0 a koeficienty a_n. Substitucí $u = z - z_0$ převedeme řadu do tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$, což je řada se středem v nule.*

Věta 2.1 *Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konverguje pro $z_1 \neq 0$. Pak:*

a) Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje absolutně pro všechny $z \in \mathbb{C}$, splňující $|z| < |z_1|$.

b) Řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n$ konvergují stejnoměrně na každé množině $M_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, kde $\rho < |z_1|$.

Důkaz

a) Nechť $|z| < |z_1|$, pak $|a_n z^n| = |a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n}| = |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z^n}{z_1^n}\right|$. Jelikož $a_n z_1^n \to 0$ (řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje), tak je člen $|a_n z_1^n|$ omezený, tedy $|a_n z_1^n| < K \in \mathbb{R}$. Označme $q = \frac{|z|}{|z_1|} < 1$, pak $|a_n z^n| < Kq^n$ a jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} Kq^n$ konvergentní, tak konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolutně.

b) Jelikož $|a_n z^n| \leq |a_n \rho^n|$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \rho^n|$ konverguje stejnoměrně[1]. Tedy aplikací Weierstrassovy věty 1.3 dostaneme stejnoměrnou konvergenci pro řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n$.

□

[1]Konvergence plyne z bodu a), stejnoměrnost z faktu, že tato řada není řadou funkcí, ale řadou reálných čísel, a tedy konverguje stejnoměrně, jelikož se na její členy lze dívat jako na konstantní funkce.

Věta 2.2 *Ke každé řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existuje právě jedno $R \in [0, \infty]$ takové, že platí:*

a) Je-li $|z| > R$, tak řada diverguje.

b) Je-li $|z| < R$, tak řada konverguje.

c) Řada konverguje stejnoměrně na množině $M_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, kde $\rho < R$.

R pak nazýváme poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Důkaz Definujme $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|z| : \sum_n z^n \text{ konverguje}\}$. Ukážeme, že takto definované R má vlastnosti a), b) a c).

a) Z definice R plyne, že $R \geq |z|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, ve kterých řada konverguje. Proto řada nekonverguje pro každé $|z| > R$.

b) Je-li $|z| < R$, pak existuje $z_1 \in \mathbb{C}$ takové, že $|z| < |z_1| < R$ a řada $\sum a_n z_1^n$ konverguje. Tedy konverguje řada $\sum a_n z^n$ dle věty 2.1 a).

c) Je-li $\rho < R$, pak existuje $z_1 \in \mathbb{C}$ takové, že $\rho < |z_1| < R$ a řada $\sum a_n z_1^n$ konverguje. Stejnoměrná konvergence na množině M_ρ plyne z věty 2.1 b).

Jednoznačnost R plyne z bodů a) a b). Jsou-li $R_1 < R_2$ takové, že oba splňují body a) a b), pak pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $R_1 < |z| < R_2$ platí, že řada $\sum a_n z^n$ musí konvergovat z bodu b) aplikovaného na R_2 a zároveň musí divergovat dle bodu a) aplikovaného na R_1. Proto je poloměr konvergence R určen jednoznačně.

$\square$

Příklad 2.1

- *$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, kde $z \in \mathbb{C}$. Jelikož řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$ konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, tedy je poloměr konvergence $R = \infty$. Konvergence není stejnoměrná v celé rovině, ale pouze v každé omezené podmnožině komplexních čísel.*

- *$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Tato řada konverguje jen pro $z = 0$, tedy je poloměr konvergence $R = 0$.*

- *$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Tato řada konverguje pro $|z| < 1$, tedy poloměr konvergence je $R = 1$.*

Oblast konvergence řad v tomto příkladu lze vyšetřit pomocí limitního podílového kritéria.

V předchozím příkladu jsme si ukázali příklady řad s různým poloměrem konvergence. V následujícím příkladu si ukážeme řady se stejným poloměrem konvergence, ale s různým chováním na hranici konvergenčního kruhu.

Příklad 2.2 *U všech řad v tomto příkladu je poloměr konvergence $R = 1$. To lze ukázat aplikací limitního podílového kritéria, např. pro první případ dostaneme $\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{|z^n|} = |z|$, tedy řada konverguje pro $|z| < 1$ a diverguje pro $|z| > 1$.*

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. *Pro bod $z = 1$ dostaneme řadu $\sum 1 = \infty$, tedy řada diverguje. Pro $z = -1$ dostaneme řadu $\sum (-1)^n$, tedy oscilující řadu.*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. *Pro bod $z = 1$ dostaneme řadu $\sum \frac{1}{n} = \infty$, tedy řada diverguje. Pro $z = -1$ dostaneme řadu $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, tedy řada konverguje dle Leibnizova kritéria.*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, *pak řada konverguje na celém konvergenčním kruhu (tedy pro všechna $|z| = 1$), jelikož $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentní řada.*

Věta 2.3 *Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mocninná řada. Pak*

a) Je-li $a_n \neq 0$ a existuje-li následující limita, pak $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

b) Pro poloměr konvergence platí $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Poznamenejme, že máme-li na pravé straně rovnosti výraz $\frac{1}{\infty}$, tak je $R = 0$ a pokud je na pravé straně výraz $\frac{1}{0}$ je $R = \infty$.

Důkaz

a) Použijeme limitní podílové kritérium. Označme $b_n = |a_n z^n|$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ a diverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$. Tedy z nerovnice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| < 1$$

dostaneme, že pro $|z| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ řada konverguje. Podobně z nerovnice $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| > 1$ dostáváme divergenci pro $|z| > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Proto je poloměr konvergence $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

b) Připomeňme, že $\limsup b_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k>n} b_k\right)$ (pro shora omezenou posloupnost $\{b_n\}$ a $\limsup b_n := \infty$ pro shora neomezenou posloupnost $\{b_n\}$. Tedy $\limsup b_n$ je největší hromadná hodnota z hodnot posloupnosti $\{b_n\}$. Jinak řečeno, existuje vybraná posloupnost $\{b_{k_n}\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} b_{k_n} = \limsup b_n$, ale neexistuje žádná vybraná posloupnost $\{b_{k_n}\}$, která by měla větší limitu.

- Nechť $|z| > R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}}$, pak $\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|z|^n|a_n|} > 1$, tedy pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\sqrt[n]{|z|^n|a_n|} > 1$ a tedy i $|z|^n|a_n| > 1$. Proto posloupnost $\{a_n z^n\}$ nemá nulovou limitu, z čehož plyne divergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (neni splněna nutná podmínka konvergence).
- Nechť $|z| < R$, tedy $\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|z|^n|a_n|} < 1$. Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q < 1$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $\sqrt[n]{|z|^n|a_n|} < q$, tedy $|z|^n|a_n| < q^n$ $\forall n > n_0$. Jelikož řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje, tak konverguje i řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$, a tedy i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

□

Věta 2.4 (Abelova) *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightrightarrows \quad \textit{na } [0,R].$$

Důkaz Použijme úpravu $\sum a_n z^n = \sum a_n R^n \left(\frac{z}{R}\right)^n$. Jelikož řada $\sum a_n R^n$ konverguje stejnoměrně[2] a posloupnost $\left(\frac{z}{R}\right)^n$ je stejnoměrně omezená[3] a monotónní. Tak řada $\sum a_n z^n$ konverguje stejnoměrně dle Abel-Dirichletova kritéria (nebo přesněji pro verzi Abel-Dirichletova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci).

□

Lemma 2.5 *Řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.*

Důkaz Označma R_1 poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a R_2 poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

[2] Je to řada konstantních funkcí.

[3] $\left(\frac{z}{R}\right)^n \leq 1$ pro všechna $z \in [0,R]$

- Nechť $|z| < R_2$, pak $|a_n z^n| = |n a_n z^{n-1}| \cdot \left|\frac{z}{n}\right|$. Jelikož posloupnost $\{\frac{|z|}{n}\}$ je omezená a klesající, tak z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} |n a_n z^{n-1}|$ (absolutní konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ pro $|z| < R_2$ plyne z věty 2.1, a)) plyne konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (dle Abel-Dirichletova kritéria), takže $R_2 \leq R_1$.
- Nechť $|z| < R_1$, pak existuje $z_1 \in \mathbb{C}$ takové, že $|z| < |z_1| < R_1$. Tedy $|n a_n z^{n-1}| = |a_n z^n| \frac{n}{|z|} = |a_n z_1^n| \frac{n}{|z|} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$. Jelikož je řada $\sum |a_n z_1|^n$ konvergentní a posloupnost $\frac{n}{|z|} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ je omezená a klesající[4], tak řada $\sum |n a_n z^{n-1}|$ konverguje a proto je $R_1 \leq R_2$.

Z předchozích bodů dostáváme $R_1 = R_2$.

□

Věta 2.6 *Nechť R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak tuto řadu můžeme libovolně derivovat a integrovat uvnitř intervalu $(-R, R)$ a platí*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}.$$

Důkaz Je-li R poloměr konvergence řady $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, pak dle lemma 2.5 je to také poloměr konvergence řady $\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Pro všechna $0 < \tilde{R} < R$ platí, že obě řady konvergují na $[-\tilde{R}, \tilde{R}]$ stejnoměrně (dle věty 2.1, b)). Označme $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, a nechť $x \in (-\tilde{R}, \tilde{R})$[5], pak

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)' \overset{\text{věta 1.6}}{=} \lim_{n\to\infty} (S_n)' = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)'$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}.$$

U integrování postupujeme obdobně.

□

Důsledek 2.7 *Mocninná řada je Taylorova řada svého součtu.*

Důkaz Nechť $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($S(x)$ je tedy součet mocninné řady. Zde je třeba podotknout, že pracujeme jen uvnitř kruhu konvergence této řady, tedy s x, pro které platí $|x| < R$.), pak
$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$ (dle věty 2.6). Pro $x = 0$ dostáváme $S^{(k)}(0) = a_k k! \Rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

□

[4] Je klesající pro $n \geq \frac{-1}{\ln\left|\frac{z}{z_1}\right|}$ a jdoucí do nuly.

[5] Poznamenejme, že pro každé $x \in (-R, R)$ existuje $\tilde{R} < R$ takové, že $x \in (-\tilde{R}, \tilde{R})$.

Příklad 2.3 *Víme, že* $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *a* $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ *pro* $|x| < 1$ *(Jde o geometrickou řadu s koeficientem x, resp. −x.), tedy poloměr konvergence těchto řad je* $R = 1$*. Dle věty 2.6 lze obě řady integrovat na intervalu* $(-1, 1)$*. Z druhé rovnosti dostaneme, že*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Po dosazení $x = 0$ *dostáváme* $\ln(1) = C = 0$*, tedy*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje dle Leibnizova kritéria, tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ *konverguje stejnoměrně na* $[0, 1]$ *(Dle Abelovy věty 2.4) a tedy* $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$*. Je třeba si uvědomit, že zde byla použita věta 2.6, která nám zaručuje rovnost* $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ *na* $(-1, 1)$ *(pro* $x = 1$ *tato rovnost platí buď pokud větu 2.6 přeformulujeme tak, aby platila i v bodě R za předpokladu stejnoměrné konvergence na* $[0, R]$ *a nebo pokud uděláme v rovnosti limitní přechod pro x jdoucí zleva do jedné).*

Příklad 2.4 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *pro* $|x| < 1$*. Integrováním dostaneme* $\mathrm{arctg}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$*. Pro* $x = 1$ *opět dostaneme konvergentní řadu dle Leibnizova kritéria. Tedy řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *konverguje stejnoměrně na* $[0, 1]$ *dle věty 2.4 a na intervalu* $[0, 1)$ *platí rovnost* $\mathrm{arctg}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$*. Ze spojitosti funkce* $\mathrm{arctg}(x)$ *v jedničce a aplikací věty 1.4 dostáváme:* $\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$*, tedy* $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$*.*

Příklad 2.5 $f(x) = (1+x)^p$*, pak* $f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(1+x)^{p-n}$*, tedy* $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$*, pro* $|x| < 1$ *(až na výjimky* $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$*, tj, kdy* $p \in \mathbb{N}$*). Zde používáme značení* $\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}$ *a* $\binom{p}{0} = 1$*.*

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(1-2)...(1-2n+2)}{2^n n!} x^n = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3...(2n-3)}{2^n n!} x^n\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} &= 4\left[1 + \frac{1}{2 \cdot 16} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3...(2n-3)}{2^n n!} \left(\frac{1}{16}\right)^n\right] \\ &= 4\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{16} - \frac{1}{4 \cdot 2!}\frac{1}{16^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}\frac{1}{16^3} - ...\right]\end{aligned}$$

$$(\mathrm{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

$$\mathrm{arcsin}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Příklad 2.6 *Rozviňte do mocninné řady* $\frac{1}{x^2-5x+6}$*.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}} x^n\end{aligned}$$

Kapitola 3

Funkce více proměnných

3.1 Metrické prostory

$\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic $(x_1, ..., x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$.

Definice 3.1 *Nechť M je množina. Pak zobrazení $\rho(x, y) : M \times M \to [0, \infty)$, se nazývá metrika (vzdálenost) na množině M, jestliže platí:*

1) $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in M$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall x, y, \in M$,

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \ \forall x, y, z \in M$.

Dvojici (M, ρ) nazveme metrický prostor.

Vlastnosti 1)-3) jsou přirozené vlastnosti, které u vzdálenosti chceme. 1) říká: Pokud se chci přesunout z bodu A do bodu B, tak a) jsou-li body A a B různé, tak musím udělat kladný počet kroků, b) jsou-li to stejné body, tak neudělám žádný krok. 2) říká: Z bodu A do bodu B musím udělat stejný počet kroků, jako z bodu B do bodu A. Situace je symetrická. 3) říká: Pokud se cestou z bodu A do bodu B stavím ještě na pivo do dobu C, tak určitě neudělám méně kroků, než když půjdu přimou cesto z A do B (trojůhelníková nerovnost).

Příklad 3.1 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ *je metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz

1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ *jelikož* $(x_i - y_i)^2 \geq 0$. *Je-li* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, *tedy* $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \ \forall i = 1, ..., n$, *proto* $x_i = y_i \ \forall i = 1, ..., n$ *a tedy* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2) *Jelikož* $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, *tak* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

3) *Označme* $u_i = x_i - y_i$ *a* $v_i = y_i - z_i$, *pak* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i)^2}$. *Ověřme nerovnost* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) &\overset{?}{\geq} d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \\
(d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}))^2 = d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 + 2d(\mathbf{x},\mathbf{y})d(\mathbf{y},\mathbf{z}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})^2 &\overset{?}{\geq} d(\mathbf{x},\mathbf{z})^2 \\
\sum_{i=1}^n (u_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i)^2} + \sum_{i=1}^n (v_i)^2 &\overset{?}{\geq} \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 \\
\sum_{i=1}^n (u_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2 \sum_{i=1}^n (v_i)^2} + \sum_{i=1}^n (v_i)^2 &\overset{?}{\geq} \sum_{i=1}^n (u_i^2 + 2u_i v_i + v_i^2) \\
2\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2 \sum_{i=1}^n (v_i)^2} &\overset{?}{\geq} \sum_{i=1}^n (2u_i v_i) \\
\sum_{i=1}^n (u_i)^2 \sum_{i=1}^n (v_i)^2 &\overset{?}{\geq} \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2.
\end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit, zda platí nerovnost $\sum_{i=1}^n (u_i)^2 \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \geq (\sum_{i=1}^n u_i v_i)^2$. *Jelikož platí*

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (u_i + \lambda v_i)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i^2 + 2\lambda u_i v_i + v_i^2 \lambda^2) = \sum_{i=1}^n u_i^2 + \lambda 2 \sum_{i=1}^n (u_i v_i) + \lambda^2 \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Tedy polynom $a + b\lambda + c\lambda^2$, *kde* $a = \sum_{i=1}^n u_i^2$, $b = 2\sum_{i=1}^n (u_i v_i)$ *a* $c = \sum_{i=1}^n v_i^2$ *má maximálně jeden kořen a tedy je jeho diskriminant* $D \leq 0$.

$$0 \geq D = b^2 - 4ac = 4\left(\sum_{i=1}^n (u_i v_i)\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$$

a tedy $\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq (\sum_{i=1}^n (u_i v_i))^2$.

$\square$

Příklad 3.2

I. $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ *je metrika.*

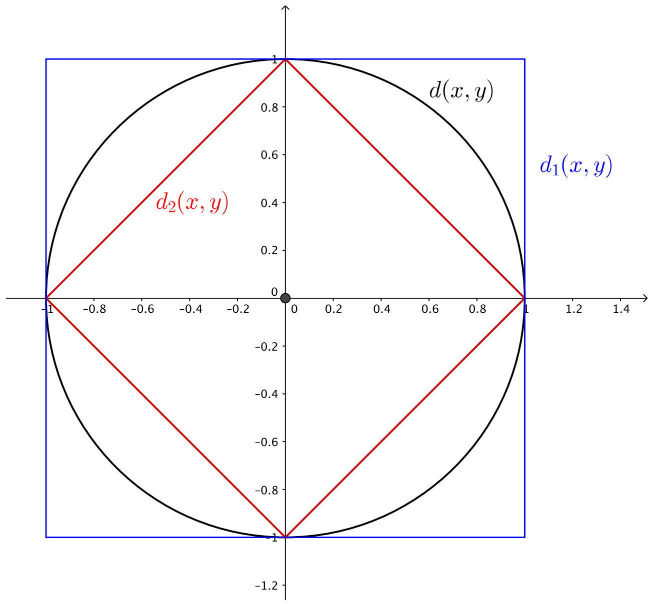
1) $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$. *Je-li* $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| = 0$, *pak* $|x_i - y_i| = 0\ \forall i = 1,\dots,n$ *a tedy* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2) *Jelikož* $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, *tak* $d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_1(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

3) $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - z_i| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| + \max_{i=1,\dots,n} |y_i - z_i| = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

II. $d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ *je metrika.*

1) $|x_i - y_i| \geq 0 \Rightarrow d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$. *Je-li* $d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, *pak* $|x_i - y_i| = 0$ *pro všechny* $i = 1,..,2$ *a tedy* $x_i = y_i\ \forall i = 1,\dots,n \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.



Obrázek 3.1:
Jednotková kružnice v různých metrikách.

2) $|x_i - y_i| = |y_i - x_i| \Rightarrow d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_2(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

3) $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, *tedy*

$$d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d_2(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = d_2(\mathbf{x},\mathbf{z})$$

Je dobré si uvědomit, že v jednodimenzionálním případě všechny tři uvedené metriky splývají, tedy platí $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Příklad 3.3 *Diskrétní metrika* $\tilde{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ *pro* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *a* $\tilde{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *pro* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. *Ověřte, že jde o metriku.*

Příklad 3.4 *Metriky se dají zavést i na obecnějších množinách, než je jen množina čísel. Je-li* M *množina funkcí definovaných na intervalu* I, *pak lze zadefinovat metriku třeba následujícím způsobem* $\rho(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$. *Ověřte, že je* $\rho(f,g)$ *metrika.*

Definice 3.2 *Nechť* $x_n, x \in M$ *a* (M,ρ) *je metrický prostor. Pak* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. *Tedy posloupnost* $\{x_n\}$ *konverguje v metrickém prostoru k* x *právě tehdy, když vzdálenost mezi* x_n *a* x *jde k nule.*

Definice 3.3 *Nechť* $x \in M$ *a* $\varepsilon > 0$, *pak množinu* $U_\varepsilon(x) := \{y \in M : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ *nazveme okolí bodu* $x \in M$ *(*ε*-nové okolí bodu* x*).*

Definice 3.4 *Množina $V \subset M$ je otevřená, jestliže pro každé $x \in V$ existuje $U_\varepsilon(x)$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset V$. Řečeno slovy, množina V je otevřená právě tehdy, když ke každému bodu této množiny existuje okolí tohoto bodu, které leží celé v množině V.*

Tvrzení 3.1 *$U_\varepsilon(x)$ je otevřená množina.*

Důkaz $U_\varepsilon(x)$ je otevřená množina $\Leftrightarrow$ $\forall y \in U_\varepsilon(x) \exists \varepsilon_y > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_y}(y) \subset U_\varepsilon(x)$. Nechť $y \in U_\varepsilon(x)$, pak $\rho(x,y) < \varepsilon$. Označme $\varepsilon_y = \varepsilon - \rho(x,y)$. Je-li $z \in U_{\varepsilon_y}(y)$, tak

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + \varepsilon_y = \varepsilon,$$

tedy $z \in U_\varepsilon(x)$. $\square$

Věta 3.2 *(Vlastnosti otevřených množin)*

i) $\emptyset$ a M jsou otevřené množiny.

ii) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

iii) Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.[1]

Důkaz

i) $\emptyset$ je otevřená množina, jestliže $\forall y \in \emptyset\ \exists U_\varepsilon(y)$ takové, že $U_\varepsilon(y) \subset \emptyset$. To platí, jelikož prázdná množina neobsahuje žádný prvek, a tedy neexistuje žádné $y \in \emptyset$, které by danou podmínku nesplňovalo. Jelikož $U_\varepsilon(y) \in M$ pro každé $y \in M$ a $\varepsilon > 0$ (z definice), tak je i množina M otevřená.

ii) Nechť $x \in \bigcup A_i$, tak existuje i takové, že $x \in A_i$. Tedy existuje $U_\varepsilon(x)$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset A_i$, a tedy $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup A_i$.

iii) Nechť $x \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ a $\exists \varepsilon_2 > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ a $U_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$, tedy $U_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(x) \subset A_1 \cap A_2$.

$\square$

Definice 3.5 *Množina $L \subset M$ je uzavřená, jestliže $M \setminus L$ je otevřená.*

Poznámka 3.1 *Průnik uzavřených množin je uzavřená množina. Sjednocení dvou uzavřených množin je uzavřená množina.*

[1] Lze rozšířit na konečné průniky.

Důkaz Viz. vlastnosti otevřených množin a fakt, že $M \setminus (\cap A_i) = \cup (M \setminus A_i)$ a $M \setminus (\cup A_i) = \cap (M \setminus A_i)$.

□

Poznámka 3.2 *$\emptyset$ i M jsou otevřené i uzavřené množiny.*

Definice 3.6 *Množina $A \subset M$ je omezená, pokud* $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \rho(x,y) < \infty$. *V opačném případě není množina A omezená.*

Definice 3.7 *Množina všech limit posloupností $\{x_n\}$, kde $x_n \in A$ se nazývá uzávěrem množiny A a značí se $\bar{A}$.*

Příklad 3.5 *Nechť $A = (0,1)$, pak $\bar{A} = [0,1]$ (uvažujeme-li Eukleidovskou metriku $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}$). Je dobré si uvědomit, že konvergence a tedy i uzávěr je spojen s metrikou, kterou používáme. Neboť ta nám definuje pojem okolí. Zatímco použití metrik $d_1(x,y)$ a $d_2(x,y)$ by nám dalo stejný výsledek, při diskrétní metrice (příklad 3.3) by $\bar{A} = A = (0,1)$.*[2]

Definice 3.8 *Mějme (M,ρ) a (P,σ) dva metrické prostory. Zobrazení $f: M \to P$ se nazývá spojité v bodě $m \in M$, jestliže $\forall U(f(m)) \exists V(m)$ tak, že $f(V(m)) \subset U(g(m))$ ($U(f(m))$ je okolí bodu $f(m)$ a $V(m)$ je okolí bodu m).*

Uvědomme si, že předchozí definice přímo vychází z pojmu spojitosti funkce tak, jak ho známe z prvního semestru. Reálná funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(f(a)) \exists V_\delta(a)$ takové, že $f(V_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

Definice 3.9 *Označme $E_d := (\mathbb{R}_d, d)$, kde $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$ je Eukleidovská metrika, pak E_d nazýváme Eukleidovský prostor. V E_d je okolí definováno $U_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_d : d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \varepsilon\}$.*

Věta 3.3 *Konvergence v E_d je konvergence po souřadnicích.*

Důkaz Nechť posloupnost $\{\mathbf{x}_n = [x_n^1, ..., x_n^d]\}$ konverguje v E_d, pak existuje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_d$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Tedy $|x_n^i - x^i| \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon$ pro každé $n > n_0$.
Nechť konverguje posloupnost $\{\mathbf{x}_n\}$ po složkách, tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0^i \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$, $\forall n > n_0^i$, $i = 1, 2, ..., d$. Nechť $n_0 = \max\{n_0^1, ..., n_0^d\}$, pak $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^i - x^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{\varepsilon^2}{d}} = \varepsilon$, pro všechna $n > n_0$.

□

[2] V této metrice jsou konvergentní posloupnosti jen takové posloupnosti, které jsou od nějakého $n_0 \in \mathbb{A}$ konstantní.

Definice 3.10 *Buď $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{E}_d$, funkce f je definovaná na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$. Pak f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in M$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.*

Poznamenejme, že predešlá definice vychází přímo z obecnejší definice spojitosti v metrických prostorem (Def. 3.9). Zde tuto definici uvádíme proto, že se dále u funkcí více proměnných budem pohybovat v Eukleidovském prostoru a tedy spojitost funkce bude definována tímto způsobem.

Poznámka 3.3 *Pro funkce jedné proměnné máme spojitost zprava a zleva. Pro funkce více proměnných definujeme spojitost vzhledem k množině. $f : M \to \mathbb{R}, \mathbf{a} \in Q \subset M$. f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in M$ vzhledem k množině Q, jestliže*

$$\forall U(f(\mathbf{a}))\ \exists V(\mathbf{a}) : (f(V(\mathbf{a}) \cap Q)) \subset U(f(\mathbf{a})).$$

Příklad 3.6

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

$D_f = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, f je spojitá na D_f vzhledem k D_f.

Tvrzení 3.4 *$L \subset M$ je uzavřená $\Leftrightarrow$ pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_n \in L$, platí, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in L$.*

Důkaz Použijeme značení $L^c = M \setminus L$.

($\Rightarrow$) Sporem: Nechť $x_n \in L$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ale $x \in L^c$, pak v každém okolí $U(x)$ leží nějaký bod $x_n \in L$, tedy celé okolí $U(x)$ neleží v L^c, proto L^c není otevřená množina, a tudíž L není uzavřená.

($\Leftarrow$) Sporem: Nechť L není uzavřená, tedy L^c není otevřená množina. Pak existuje $x \in L^c$ takové, že v každém okolí $U_{\delta_n}(x)$, kde $\delta_n = \frac{1}{n}$, existuje alespoň jeden bod x_n, který neleží v L^c. Tedy $x_n \in L$, $|x_n - x| < \delta_n = \frac{1}{n}$, a proto $x_n \to x \in L^c$. Což je ve sporu s předpokladem, že $x_n \in L$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implikuje $x \in L$.

$\square$

Definice 3.11 *Množina $A \subset M$ je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}$, $x_n \in A$, lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in A$.*

Věta 3.5 *Kompaktní množina je uzavřená a omezená.*

Důkaz

(Uzavřenost) Nechť $x_n \in A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jelikož je A kompaktní, existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \hat{x} \in A$. Jelikož vybraná podposloupnost z konvergentní posloupnosti má stejnou limitu, $x = \hat{x} \in A$, a tedy je A uzavřená (viz tvrzení 3.4).

(Omezenost) Sporem: Nechť množina A není omezená, pak $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x,y) = \infty$. Tedy pro každé $x_0 \in A$ je $\sup_{x\in A} \rho(x_0, x) = \infty$.[3] Zvolme $x_0 \in A$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $\rho(x_0, x_n) > n$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ vybereme konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a označíme x její limitu ($x_{n_k} \to x$). Pak $\rho(x_0, x) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_0, x_{n_k}) = \infty$, proto x neleží v A, jelikož vzdálenost dvou bodů v metrickém prostoru je vždy konečná. Tedy jsme došli ke sporu s kompaktností množiny A.

□

Věta 3.6 *Množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní (uvažujeme Eukleidovskou metriku) $\Leftrightarrow$ M je uzavřená a omezená.*

Důkaz

($\Rightarrow$) Věta 3.5.

($\Leftarrow$) Nechť je M uzavřená a omezená, tedy existuje K takové, že $\forall \mathbf{x} \in M$ platí $||\mathbf{x}|| < K$. Nechť $\{\mathbf{x}_n\}$ je posloupnost prvků $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^d) \in M$. Z omezenosti množiny M dostaneme, že reálná posloupnost prvních souřadnic $\{x_n^1\}$ posloupnosti $\{\mathbf{x}_n\}$ je omezená, a tedy dle Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x^1_{n_{k,1}}\}$. Zaměříme se nyní na posloupnost druhých souřadnic vybrané podposloupnosti $\{x_{n_{k,1}}\}$, tj. na reálnou posloupnost $\{x^2_{n_{k,1}}\}$. Tato posloupnost je omezená, a tedy existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x^2_{n_{k,2}}\}$. Poznamenejme, že podposloupnost $\{x^1_{n_{k,2}}\}$ je konvergentní, protože je to podposloupnost konvergentní posloupnosti $\{x^1_{n_{k,1}}\}$. Obdobně z posloupnosti $\{x^3_{n_{k,2}}\}$ vybereme konvergentní podposloupnost $\{x^3_{n_{k,3}}\}$. Pokračujeme-li tímto způsobem, dostaneme nakonec konvergentní podposloupnost $\{\mathbf{x}_{n_{k,d}} = (x^1_{n_{k,d}}, ..., x^d_{n_{k,d}})\}$. To, že $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_{n_{k,d}} = \mathbf{x} \in M$, plyne přímo z uzavřenosti množiny M a tvrzení 3.4.

□

Věta 3.7 *Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.*

Důkaz Nechť $f : M \to A$ je spojitá funkce, M je kompaktní množina a $A = f(M)$. Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků z A, tedy $y_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak existují vzory této posloupnosti $x_n \in M$, tj. $y_n = f(x_n)$. Jelikož je M kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a navíc platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$. Označme $y = f(x) \in A$ a zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - \hat{x}| < \delta$, pak $|f(x) - f(\hat{x})| = |y - f(\hat{x})| < \varepsilon$ (f je spojitá). Jelikož $x_{n_k} \to x$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0$ $|x_{n_k} - x| < \delta$. Tedy $|f(x) - f(x_{n_k})| = |y - y_{n_k}| < \varepsilon \Rightarrow y_{n_k} \to y$. Ukázali jsme, že z libovolné posloupnosti $\{y_n\}$ prvků množiny A lze vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v A, tedy je množina A kompaktní.

□

[3] Jelikož $\rho(x,y) \le \rho(x,x_0) + \rho(x_0,y)$.

Důsledek 3.8 *Spojitá funkce $f : M \to A \subset \mathbb{R}$ na kompaktu nabývá svého minima i maxima.*

Důkaz Nechť $f : M \to A$, f je spojitá a M je kompaktní, pak z předchozí věty 3.7 víme, že $A = f(M)$ je kompaktní. Tedy A je uzavřená a omezená (věta 3.5). Pak $\max_{y \in A} = \sup_{y \in A}$. Existence suprema plyne z omezenosti množiny A, existence maxima plyne z uzavřenosti množiny A. Nechť $S = \sup_{y \in A}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in N$ takové, že $S - y_n < \frac{1}{n}$, tedy $y_n \to S$, a proto $S \in A$. Jelikož $S \in A$, pak existuje vzor tohoto bodu v M, tedy existuje $x \in M$ takové, že $f(x) = S = \sup_{y \in A} = \sup_{x \in M} f(x)$, proto f nabývá svého maxima v x.

Obdobně provedeme důkaz pro minimum.

$\square$

Poznámka 3.4 *Spojitost implikuje spojitost vzhledem k množině, tj. je-li $f(x, y)$ spojitá v bodě $[a, b]$, pak je spojitá v tomto bodě na každé přímce procházející tímto bodem.*

3.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

3.2.1 Parciální derivace, totální diferenciál a derivace ve směru

Definice 3.12 *Nechť je f definovaná na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} = [a_1, ..., a_d] \in \mathbb{R}^d$. Existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_d) - f(a_1, ..., a_d)}{h},$$

pak se nazývá parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle proměnné x_i a značí se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{a})$ nebo $f_{x_i}(\mathbf{a})$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_{x_i}(x_1, ..., x_d)$ podle proměnné x_j, pak tuto derivaci nazveme parciální derivací druhého řádu podle proměnných x_i a x_j a značíme ji $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ nebo f_{x_i, x_j}. Obdobně zadefinujeme parciální derivace n-tého řádu.

Příklad 3.7 *Nechť $f(x, y) = x^2 y^3$, pak $f_x(x, y) = 2xy^3$ a $f_y(x, y) = 3x^2 y^2$. Skutečně*

$$\begin{aligned} f_x &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^2 - x^2] y^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[2xh + h^2] y^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2x + h] y^3}{1} = 2xy^3. \end{aligned}$$

Poznámka 3.5 *Obecně záleží na pořadí, ve kterém derivujeme, tedy nemusí platit, že f_{x_i, x_j} je rovna f_{x_j, x_i}.*

Příklad 3.8

- *Nechť $f(x, y) = x^2 y^3$, pak $f_x(x, y) = 2xy^3$, $f_y(x, y) = 3x^2 y^2$ a $f_{x,y}(x, y) = 6xy^2 = f_{y,x}(x, y)$. Tedy v tomto případě můžeme pořadí derivací zaměnit.*

- *Nechť*

$$f(x,y) = xy, \quad |x| > |y|,$$
$$= 0, \quad |x| \le |y|.$$

Pak

$$\begin{aligned} f_{x,y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{\hat{h}\to 0} \frac{f(\hat{h},h)-f(0,h)}{\hat{h}} - \lim_{\hat{h}\to 0} \frac{f(\hat{h},0)-f(0,0)}{\hat{h}}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{\hat{h}\to 0} \frac{0-0}{\hat{h}} - \lim_{\hat{h}\to 0} \frac{\hat{h}\cdot 0-0}{\hat{h}}}{h} = 0 \end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned} f_{y,x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{\hat{h}\to 0} \frac{f(h,\hat{h})-f(h,0)}{\hat{h}} - \lim_{\hat{h}\to 0} \frac{f(0,\hat{h})-f(0,0)}{\hat{h}}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{\hat{h}\to 0} \frac{h\cdot\hat{h}-0}{\hat{h}} - \lim_{\hat{h}\to 0} \frac{0-0}{\hat{h}}}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tedy v tomto případě pořadí derivací prohodit nelze.

Věta 3.9 *Nechť f má spojité derivace až do řádu n na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$, pak nezáleží na pořadí, podle kterého derivujeme.*

Důkaz Důkaz provedeme jen pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a $n = 2$. Označme $a = (a_1, a_2)$ a

$$F(h) = \frac{f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1, a_2)}{h^2}.$$

Pak dvojím použitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě (nejdříve na rozdíl funkcí $k(a_1+h) - k(a_1)$, kde $k_1(a_1) = [f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)]$ a $v_x \in (0,1)$, a pak na rozdíl funkcí $f_x(a_1+hv_x, a_2+h) - f_x(a_1+hv_x, a_2)$, $v_y \in (0,1)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{[f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2)] - [f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)]}{h^2} \\ &= \frac{k(a_1+h) - k(a_1)}{h^2} = \frac{k'(a_1+hv_x)h}{h^2} \\ &= \frac{[f_x(a_1+hv_x, a_2+h) - f_x(a_1+hv_x, a_2)]h}{h^2} \\ &= \frac{f_x(a_1+hv_x, a_2+h) - f_x(a_1+hv_x, a_2)}{h} = \frac{f_{x,y}(a_1+hv_x, a_2+hv_y)h}{h} \\ &= f_{x,y}(a_1+hv_x, a_2+hv_y). \end{aligned}$$

Obdobně lze postupovat pro $g(a_2) = [f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)]$.

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1, a_2)}{h^2} \\ &= \frac{[f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1, a_2+h)] - [f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)]}{h^2} \\ &= \frac{g(a_2+h) - g(a_2)}{h^2} = \frac{g'(a_2+hv_y)h}{h^2} \\ &= \frac{[f_y(a_1+h, a_2+hv_y) - f_y(a_1, a_2+hv_y)]h}{h^2} \\ &= \frac{f_y(a_1+h, a_2+hv_y) - f_y(a_1, a_2+hv_y)}{h} = \frac{f_{y,x}(a_1+hv_x, a_2+hv_y)h}{h} \\ &= f_{y,x}(a_1+hv_x, a_2+hv_y). \end{aligned}$$

Tedy

$$f_{x,y}(a_1,a_2) = \lim_{h\to 0} f_{x,y}(a_1+hv_x, a_2+hv_y) = \lim_{h\to 0} F(h)$$
$$= \lim_{h\to 0} f_{y,x}(a_1+hv_x, a_2+hv_y) = f_{y,x}(a_1,a_2).$$

□

Věta 3.10 *(Věta o střední hodnotě) Nechť má funkce f v okolí bodu $U(\mathbf{a})$ všechny první parciální derivace (vlastní). Pak $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{a})\ \exists \xi_\mathbf{i} \in U_\delta(\mathbf{a}),\ i = 1, ..., d,$ tak, že*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_\mathbf{i})(x_i - y_i),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ a $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_d)$.

Důkaz Důkaz pro jednoduchost provedeme pouze pro $d = 2$, tedy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nejdříve se zaměříme na to, zda pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí, že alespoň jeden z bodů (x_1, y_2) a (y_1, x_2) je také v okolí $U_\delta(\mathbf{a})$. Jelikož $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{a})$, pak $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sum_{i=1}^{2}(x_i - a_i)^2 < \delta$ a $|\mathbf{y} - \mathbf{a}| = \sum_{i=1}^{2}(y_i - a_i)^2 < \delta$.

a) Je-li $(x_2 - a_2)^2 \geq (y_2 - a_2)^2$, pak $\sum_{i=1}^{2}(x_i - a_i)^2 \geq (x_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2$, a proto $(x_1, y_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$.

b) Je-li $(x_2 - a_2)^2 < (y_2 - a_2)^2$, pak $\sum_{i=1}^{2}(y_i - a_i)^2 < (y_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$, a proto $(y_1, x_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$.

Uvažujme nyní případ, kdy $(y_1, x_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) &= f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_{1,1}, x_2)(x_1 - y_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} f(y_1, \xi_{2,2})(x_2 - y_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_\mathbf{i})(x_i - y_i), \end{aligned}$$

kde $\xi_{1,1} \in (x_1, y_1)$, $\xi_{2,2} \in (x_2, y_2)$, $\xi_\mathbf{1} = (\xi_{1,1}, x_2)$ a $\xi_\mathbf{2} = (y_1, \xi_{2,2})$. Jelikož $(x_1, x_2), (y_1, x_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$, pak i $\xi_\mathbf{1} = (\xi_{1,1}, x_2) \in U_\delta(\mathbf{a})$ a obdobně i $\xi_\mathbf{2} \in U_\delta(\mathbf{a})$.

□

Věta 3.11 *Nechť jsou všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ omezené na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$ pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak je funkce f spojitá v bodě $\mathbf{a}$.*

Důkaz Připomeňme, že f je spojitá v $\mathbf{a}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$ a parciální derivace jsou omezené na okolí $U(\mathbf{a})$, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right| < K\ \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \forall i = 1, ..., d$.

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| &= \left| \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)(x_i - a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)(x_i - a_i) \right| \\ &< \sum_{i=1}^{d} K|x_i - a_i| \leq dK \max_{i=1,...,d} |x_i - a_i| \leq dK||\mathbf{x} - \mathbf{a}||. \end{aligned}$$

Chceme-li, aby $\varepsilon > dK||\mathbf{x}-\mathbf{a}||$, stačí volit $\delta \le \frac{\varepsilon}{dK}$ takové, že $U_\delta(\mathbf{a}) \subset U(\mathbf{a})$. Potom

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < dK||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < dK\delta \le \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a}).$$

□

Definice 3.13 *Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$. Pak totální diferenciál $d(f, \mathbf{a})$ funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je lineární zobrazení*

$$d(f, \mathbf{a}) : \mathbf{h} = (h_1, ..., h_d) \mapsto \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i,$$

pro které platí

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i + \eta(\mathbf{h}),$$

kde $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\eta(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0$ *a* $||\mathbf{h}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} h_i^2}$.

Má-li funkce f v bodě a totální diferenciál, pak říkáme, že je v bodě a diferencovatelná.

Věta 3.12 *Nechť existuje $d(f, \mathbf{a})$, pak*

- *funkce f je v bodě $\mathbf{a}$ spojitá,*
- *existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v bodě $\mathbf{a}$ a $\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.*

Důkaz

- Spojitost: Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| &= \left|\sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i + \eta(\mathbf{h})\right| \leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i||h_i| + |\eta(h)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| \cdot ||\mathbf{h}|| + |\eta(\mathbf{h})| = ||\mathbf{h}|| \left(\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| + \frac{|\eta(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||}\right) \\ &\leq (K+1)||\mathbf{h}||,\end{aligned}$$

  kde $K = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|$ a $\mathbf{h}$ je dostatečně malé (dostatečně blízko počátku), aby $\frac{|\eta(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||} < 1$. Pak pro $\delta = \frac{\varepsilon}{K+1}$ dostaneme, že

$$|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon,$$

  tedy f je spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

-

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{e_i}h) - f(\mathbf{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,...,a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_d) - f(a_1,...,a_d)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha_i h + \eta(h)}{h} = \alpha_i + \lim_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{h} = \alpha_i.\end{aligned}$$

Připomeňme, že $\mathbf{h}$ v první části důkazu je d-dimenzionální ($\mathbf{h} = (h_1,...,h_d) \in \mathbb{R}^d$), zatímco h ve druhé části důkazu je reálné číslo.

Příklad 3.9 *Nechť $f(x,y) = x^2y^3$ a $\mathbf{a} = [1,1]$, pak $f_x = 2xy^3$, $f_y = 3x^2y^2$, a tedy*

$$d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) = f_x(1,1)h_1 + f_y(1,1)h_2 = 2h_1 + 3h_2,$$

kde $\mathbf{h} = (h_1,h_2)$.

$$\begin{aligned}f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) &= (1+h_1)^2(1+h_2)^3 - 1 \\ &= (1+2h_1+h_1^2)(1+3h_2+3h_2^2+h_2^3) - 1 \\ &= 2h_1 + 3h_2 + (h_1^2 + 6h_1h_2 + ...) \\ &= d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + (h_1^2 + 6h_1h_2 + ...).\end{aligned}$$

Tedy totální diferenciál je lineární část přírůstku.

Z definice totálního diferenciálu a věty 3.12 dostaneme

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \eta(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i + \eta(\mathbf{h})$$
$$= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + \eta(\mathbf{h}),$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_d)$.

Poznamenejme, že $f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i$ je tečná rovina k funkci f v bodě $\mathbf{a}$.

Definice 3.14 *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_n)^T$ a $f_i, i = 1, ..., n$, jsou v bodě $\mathbf{a}$ diferencovatelné. Pak*

$$d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(\mathbf{a}) h_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f_n(\mathbf{a}) h_i \end{pmatrix} = A \cdot \mathbf{h}^T,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & ... & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

je Jacobiho matice zobrazení f v bodě $\mathbf{a}$.

Poznámka 3.6 *Z definic 3.14, 3.13 a věty 3.12 plyne, že pro funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ platí*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T,$$

kde $\eta(\mathbf{h}) = (\eta_1(\mathbf{h}), ..., \eta_n(\mathbf{h})) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\eta(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = (0, ..., 0)$.

Věta 3.13 *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ a g má totální diferenciál v bodě $f(\mathbf{a})$. Označme $d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) = A \cdot \mathbf{h}^T$ a $d(g, f(\mathbf{a}))(\hat{\mathbf{h}}) = B \cdot \hat{\mathbf{h}}^T$. Pak $g \circ f$ má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$ a platí*

$$d(g \circ f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = BA \cdot \mathbf{h}^T.$$

Důkaz

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T, \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\eta(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0,$$
$$g(\mathbf{b}+\hat{\mathbf{h}}) = g(\mathbf{b}) + B \cdot \hat{\mathbf{h}}^T + \hat{\eta}(\hat{\mathbf{h}})^T, \quad \lim_{\hat{\mathbf{h}}\to\mathbf{0}} \frac{\hat{\eta}(\hat{\mathbf{h}})}{||\hat{\mathbf{h}}||} = 0.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
g \circ f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{a}+\mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a}) + A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T) \\
&= g(f(\mathbf{a})) + B \cdot (A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T) + \hat{\eta}(A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T)^T \\
&= g(f(\mathbf{a})) + BA \cdot \mathbf{h}^T + B\eta(\mathbf{h})^T + \hat{\eta}(A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T)^T.
\end{aligned}
$$

Označme $\tilde{\eta}(\mathbf{h}) = B\eta(\mathbf{h})^T + \hat{\eta}(A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T)^T$, pak

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\tilde{\eta}(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} &= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{B\eta(\mathbf{h})^T + \hat{\eta}(A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T)^T}{||\mathbf{h}||} \\
&= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{B\eta(\mathbf{h})^T}{||\mathbf{h}||} + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\hat{\eta}(A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T)^T}{||A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T||} \cdot \frac{||A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T||}{||\mathbf{h}||} = 0,
\end{aligned}
$$

jelikož $A \cdot \mathbf{h}^T + \eta(\mathbf{h})^T \to \mathbf{0}$ pro $|\mathbf{h}| \to \mathbf{0}$. Tedy

$$
g \circ f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = g \circ f(\mathbf{a}) + BA \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\eta}(\mathbf{h}),
$$

a tedy totální diferenciál $g \circ f$ v bodě $\mathbf{a}$ je

$$
d(g \circ f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = BA \cdot \mathbf{h}^T.
$$

□

Důsledek 3.14 *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť dále existují totální diferenciály $d(f, \mathbf{a})(\mathbf{h})$ a $d(g, \mathbf{b})(\hat{\mathbf{h}})$, kde $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$. Pak*

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}).
$$

Důkaz

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(g \circ f)(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial}{\partial x_d}(g \circ f)(\mathbf{a})\right) \cdot \mathbf{h} &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(\mathbf{a}) h_i = d(g \circ f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) \\
= BA \cdot \mathbf{h}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(\mathbf{a})) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(\mathbf{a})) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \mathbf{h}^T \\
= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(\mathbf{a}))\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(\mathbf{a}))\frac{\partial f_j}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} & \mathbf{h}^T \\
= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(\mathbf{a}))\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(\mathbf{a}))\frac{\partial f_j}{\partial x_d}(\mathbf{a})\right) & \cdot \mathbf{h}.
\end{aligned}
$$

□

Definice 3.15 *Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, ..., v_d)$ je nenulový vektor. Pak*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\vec{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{a})}{||\vec{\mathbf{v}}|| \cdot h}$$

nazveme derivací funkce f v bodě $\mathbf{a}$ ve směru $\vec{\mathbf{v}}$ a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{a})$.[4]

Poznámka 3.7 *Z předchozí definice je vidět, že u směrové derivace nezáleží na velikosti vektoru $\vec{\mathbf{v}}$, ale pouze na jeho směru.*

Věta 3.15 *Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ (je diferencovatelná v $\mathbf{a}$). Pak existuje derivace ve směru $\vec{\mathbf{v}}$ a platí*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{a}) = \frac{\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i}{||\vec{\mathbf{v}}||}.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{a}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\vec{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{a})}{||\vec{\mathbf{v}}|| \cdot h} = \lim_{h \to 0} \frac{d(f, \mathbf{a})(h\vec{\mathbf{v}}) + \eta(h\vec{\mathbf{v}})}{||\vec{\mathbf{v}}||h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{d(f, \mathbf{a})(h\vec{\mathbf{v}})}{||\vec{\mathbf{v}}||h} + \lim_{h \to 0} \frac{\eta(h\vec{\mathbf{v}})}{||\vec{\mathbf{v}}||h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=1}^d \alpha_i h v_i}{||\vec{\mathbf{v}}||h} = \frac{\sum_{i=1}^d \alpha_i v_i}{||\vec{\mathbf{v}}||} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i}{||\vec{\mathbf{v}}||} \end{aligned}$$

□

Definice 3.16 *Nechť funkce f má všechny první parciální derivace v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, pak vektor parciálních derivací*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \right)$$

nazveme gradientem funkce f v bodě $\mathbf{a}$.

[4] Někdy se v této definici uvažuje pouze jednotkový vektor ($||\vec{\mathbf{v}}|| = 1$), pak je derivace ve směru definovaná následující limitou $\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\vec{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{a})}{h}$.

Důsledek 3.16 *Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, pak*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{a}) = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{v}}}{||\vec{\mathbf{v}}||}.$$

Poznamenejme, že $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *zde značí skalární součin vektorů* $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ *a* $\vec{\mathbf{v}}$*, tedy* $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i$.

Tvrzení 3.17 (Vlastnosti gradientu) *Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak*

i) gradient $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ *je směr největšího růstu funkce f v bodě $\mathbf{a}$,*

ii) gradient je kolmý na vrstevnici.

Důkaz

i) Hledejme směr určený vektorem $\vec{\mathbf{v}}$, ve kterém je derivace (ve směru) největší, tedy směr nejvetšího růstu funkce f. Tj.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{a}) = \max_{\vec{\mathbf{u}}, ||\vec{\mathbf{u}}||=1} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(\mathbf{a}).$$

Z předchozího důsledku víme, že $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(\mathbf{a}) = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{u}}}{||\vec{\mathbf{u}}||} = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{u}}$ pro $||\vec{\mathbf{u}}|| = 1$. Označme α úhel mezi vektory $\vec{\mathbf{u}}$ a $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$, pak

$$\begin{aligned}\max_{\vec{\mathbf{u}}, ||\vec{\mathbf{u}}||=1} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(\mathbf{a}) &= \max_{\vec{\mathbf{u}}, ||\vec{\mathbf{u}}||=1} \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \max_{\vec{\mathbf{u}}, ||\vec{\mathbf{u}}||=1} ||\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|| \cdot ||\vec{\mathbf{u}}|| \cos(\alpha) \\ &= \max_{\alpha \in [0, 2\pi)} ||\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|| \cos(\alpha) = ||\operatorname{grad} f(\mathbf{a})||,\end{aligned}$$

Maximální hodnotu dostaneme, když $\cos(\alpha) = 1$, tedy $\alpha = 0$, tedy hledaný vektor $\vec{\mathbf{v}}$ má stejný směr jako gradient $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$, a proto $\vec{\mathbf{v}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ určuje směr největšího růstu funkce f v $\mathbf{a}$.

ii) Uvažujme vrstevnici k funkci f v bodě $\mathbf{a}$, tedy parametricky zadanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^d$, kde $c(t) = (x_1(t), ..., x_d(t))$, $I \subset \mathbb{R}$, pro kterou platí:

a) $f(x_1(t), ..., x_d(t)) = f(\mathbf{a})$ pro všechna $t \in I$ (je to vrstevnice),

b) existuje $t_0 \in I$ takové, že $(x_1(t_0), ..., x_d(t_0)) = \mathbf{a}$ (prochází bodem $\mathbf{a}$).

Pak $f(x_1(t), ..., x_d(t))' = 0$ (jde o konstantní funkci, viz bod a)), a tedy dle důsledku 3.14

$$
\begin{aligned}
0 = f(x_1(t_0), ..., x_d(t_0))' &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial x_i}{\partial t}(t_o) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \right) \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t_0), ..., \frac{\partial x_d}{\partial t}(t_0) \right) \\
&= \mathrm{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t_0), ..., \frac{\partial x_d}{\partial t}(t_0) \right).
\end{aligned}
$$

Proto je gradient kolmý na vektor $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t_0), ..., \frac{\partial x_d}{\partial t}(t_0)\right)$, a tedy kolmý na vrstevnici c.[5]

□

Příklad 3.10 *Uvažujme funkci dvou proměnných $f(x, y)$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a nechť má funkce f všechny parciální derivace až do řádu n. Označme $F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, pak $F(0) = f(\mathbf{a})$ a $F(1) = f(\mathbf{a}+\mathbf{h})$. Dle pravidel o derivaci složené funkce (důsledek 3.14) dostaneme*

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2, \\
F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2, \\
F^{(n)}(t) &= \sum_{i_1,...,i_n=1}^{d} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_n}}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \cdot ... \cdot h_{i_n}.
\end{aligned}
$$

Pak

$$
f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\eta)}{n!},
$$

kde $\eta \in (0, 1)$.

Definice 3.17 *Nechť f má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ spojité parciální derivace až do řádu n včetně. Diferenciálem n-tého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$ rozumíme zobrazení*

$$
d^n(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i_1,...,i_n=1}^{d} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_n}}(\mathbf{a}) h_{i_1} h_{i_2} \cdot ... \cdot h_{i_n}.
$$

[5] Vektor $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t_0), ..., \frac{\partial x_d}{\partial t}(t_0)\right)$ určuje směr, kterým jde vrstevnice c z bodu $\mathbf{a}$.

Věta 3.18 *Nechť* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R}^d$ *a* $A \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená množina splňující:*

- $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h} \in A$,
- *fukce* f *má na* A *spojité všechny parciální derivace až do řádu* $n + 1$.

Pak existuje $v \in (0, 1)$ *takové, že*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})}{2!} + ... + \frac{d^n(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})}{n!} + \frac{d^{n+1}(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{(n+1)!}.$$

Důkaz Zavedeme funkci $F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, pak podobně jako v předchozím příkladě použijeme Taylorův rozvoj této funkce v nule, tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(n)}(0)}{(n)!} + \frac{F^{(n+1)}(v)}{(n+1)!} \\ &= f(\mathbf{a}) + d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})}{2!} + ... + \frac{d^n(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})}{(n-1)!} + \frac{d^n(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

kde $v \in (0, 1)$.

□

3.2.2 Lokální extrém funkce

Definice 3.18 *Nechť* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *je definovaná na okolí* $U(\mathbf{a})$, *kde* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. *Pak*

i) f *má v* $\mathbf{a}$ *lokální maximum, jestliže existuje okolí* $\hat{U}(\mathbf{a})$ *takové, že* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ $\forall \mathbf{x} \in \hat{U}(\mathbf{a})$. *Je-li* $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ $\forall \mathbf{x} \in \hat{U}^*(\mathbf{a})$, *kde* $\hat{U}^*(\mathbf{a}) = \hat{U}(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$, *pak jde o ostré lokální maximum. Podobně zadefinujeme lokální/ostré lokální minimum.*

ii) f *má v* $\mathbf{a}$ *(ostré) lokální maximum vzhledem k množině* $M \subset \mathbb{R}^d$, *jestliže existuje* $\hat{U}(\mathbf{a})$ *takové, že* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ $\forall \mathbf{x} \in \hat{U}(\mathbf{a}) \cap M$, *(*$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ $\forall \mathbf{x} \in \hat{U}^*(\mathbf{a}) \cap M$*).*

Věta 3.19 *Nechť* f *má v* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ *lokální extrém a existují všechny parciální derivace* f *v* $\mathbf{a}$, *pak*

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a})\right) = 0.$$

Důkaz Nechť $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \neq 0$, pak pro $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) > 0$ dostaneme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,...,a_i+h,...,a_d)-f(\mathbf{a})}{h} > 0$, tedy pro h dostatečně blízké nule platí

$$\begin{aligned} f(a_1,...,a_i+h,...,a_d) &> f(\mathbf{a}) \text{ pro } h > 0, \\ f(a_1,...,a_i+h,...,a_d) &< f(\mathbf{a}) \text{ pro } h < 0. \end{aligned}$$

Tedy v každém okolí $U(\mathbf{a})$ existují body $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, pro které platí $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{y})$, a tedy f nemá v $\mathbf{a}$ extrém. Obdobně pro $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) < 0$.

□

Příklad 3.11 *Nechť funkce $f(x_1, x_2)$ má v $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace do řádu $n = 2$ a nechť $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})\right) = \mathbf{0}$.*

$$\begin{aligned} d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a})h_1h_1 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a})h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a})h_2h_2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})h_ih_j. \end{aligned}$$

Pak dle věty 3.18 existuje $v \in (0,1)$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{2!} = f(\mathbf{a}) + \frac{d^2(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{2!}.$$

Z této rovnosti se zdá, že o tom, zda má funkce f v $\mathbf{a}$ extrém, rozhoduje tvar druhého diferenciálu. Přesneji tuto teorii formulujeme na následujících stránkách.

Definice 3.19 *Nechť $Q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}h_ih_j$, kde a_{ij} jsou prvky symetrické matice A typu $d \times d$ a $\mathbf{h} = (h_1,...,h_d) \in \mathbb{R}^d$. Pak $Q(\mathbf{h})$ nazýváme kvadratickou formou.*

Kvadratická forma $Q(h)$ je

1) *pozitivně definitní, jestliže $Q(\mathbf{h}) > 0\ \forall \mathbf{h} \neq 0$,*

2) *pozitivně semidefinitní, jestliže $Q(\mathbf{h}) \geq 0\ \forall \mathbf{h}$,*

3) *negativně definitní, jestliže $Q(\mathbf{h}) < 0\ \forall \mathbf{h} \neq 0$,*

4) *negativně semidefinitní, jestliže $Q(\mathbf{h}) \leq 0\ \forall \mathbf{h}$,*

5) *indefinitní, jestliže existuje $\mathbf{h}$ a $\hat{\mathbf{h}}$ takové, že $Q(\mathbf{h}) > 0$ a $Q(\hat{\mathbf{h}}) < 0$.*

Následující tvrzení uvedeme bez důkazu.

Tvrzení 3.20 *Kvadratická forma $Q(\mathbf{h})$ určená maticí $A = (a_{ij})$ je pozitivně definitní, právě tehdy, když jsou hlavní minory matice A, tj. determinanty*

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{d1} & \ldots & a_{dd} \end{vmatrix} = \det A,$$

kladné.

Kvadratická forma $Q(\mathbf{h})$ je negativně definitní, právě tehdy, když její hlavní minory střídají znaménka a $a_{11} < 0$.

Příklad 3.12 *Nechť $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $\mathbf{a} = [0,0]$, pak*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pozorování: Kvadratická forma $Q(\mathbf{h}) = d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 2h_1h_1 + 2h_2h_2 = 2(h_1^2 + h_2^2)$ příslušné matice A je pozitivně definitní a funkce f má v $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum.[6]

Pro $f(x,y) = x^2 - y^2$ a $\mathbf{a} = [0,0]$ dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pozorování: Kvadratická forma $Q(\mathbf{h}) = d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 2h_1h_1 - 2h_2h_2 = 2(h_1^2 - h_2^2)$ příslušné matice A je indefinitní, jelikož $Q(1,0) = 2 > 0$ a $Q(0,1) = -2 < 0$, a funkce f nemá v $\mathbf{a}$ lokální extrém.

Otázka: Platí obecně, že pozitivní definitnost (negativní definitnost) příslušné kvadratické formy při splnění podmínky $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ implikuje, že f má v $\mathbf{a}$ lokální minimum (lokální maximum)? A platí, že indefinitnost příslušné formy nám již říká, že funkce f v bodě $\mathbf{a}$ nemá extrém?

Na tyto otázky nalezneme odpověď ve větě 3.21.

Poznamenejme, ža matici druhých parciálních derivací A se říká Hessova matice.

Věta 3.21 *Nechť f má spojité parciální derivace až do řádu $n = 3$ na okolí $U(\mathbf{a})$ a $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a})\right) = \mathbf{0}$. Je-li kvadratická forma $d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})$ $(Q(\mathbf{h}))$*

[6] Zde je možné vypozorovat podobnost s funkcí jedné proměnné, kde platilo $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, pak má funkce f v a lokální minimum.

i) pozitivně definitní, pak f má v $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum,

ii) negativně definitní, pak f má v $\mathbf{a}$ ostré lokální maximum,

iii) indefinitní, pak funkce f nemá v $\mathbf{a}$ lokální extrém.

Než provedeme důkaz této věty, připravíme si trochu teorie, která se nám bude k tomuto důkazu hodit.

Lemma 3.22 *Nechť kvadratická forma $Q(\mathbf{h})$ je pozitivně definitní, pak existuje $\beta > 0$ takové, že $Q(\mathbf{h}) > \beta||\mathbf{h}||^2$ $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$.*

Důkaz Připomeňme, že $Q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j$ je pozitivně definitní, když $Q(\mathbf{h}) > 0$ $\forall \mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Uvažujme kvadratickou formu Q na jednotkové sféře $b(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : ||\mathbf{x}|| = 1\}$. Pak dle důsledku 3.8 nabývá Q na $b(0,1)$ svého minima. Označme $\beta = \frac{\min_{\mathbf{h} \in b(0,1)} Q(\mathbf{h})}{2} > 0$. Nechť $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, pak

$$Q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{h_i}{||\mathbf{h}||} \frac{h_j}{||\mathbf{h}||} ||\mathbf{h}||^2 = ||\mathbf{h}||^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right) > ||\mathbf{h}||^2 \beta.$$

$\square$

Nyní se vrátíme k důkazu věty 3.21.

Důkaz Nechť f má spojité parciální derivace až do řádu $n = 3$ na okolí $U(\mathbf{a})$, $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a})\right) = 0$ a uvažujme kvadratickou formu $Q(\mathbf{h}) = d^2(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) h_i h_j$.

i) Nechť $Q(\mathbf{h})$ je pozitivně definitní. Dle věty 3.18 dostaneme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) + d(f,\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2(f,\mathbf{a})(\mathbf{h})}{2!} + \frac{d^3(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{3!} \\ &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + \frac{Q(\mathbf{h})}{2!} + \frac{\sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}+v\mathbf{h}) h_i h_j h_k}{3!}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + \frac{Q(\mathbf{h})}{2!} + \frac{\sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}+v\mathbf{h}) h_i h_j h_k}{3!} \\ &= \frac{Q(\mathbf{h})}{2!} + \frac{d^3(f,\mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{3!}. \end{aligned}$$

Jelikož $Q(\mathbf{h})$ je pozitivně definitní, pak dle lemma 3.22 $Q(\mathbf{h}) > ||\mathbf{h}||^2\beta$. Označme $M = \max_{i,j,k=1,\dots,d} \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}+v\mathbf{h})\right|$, pak $|d^3(f, \mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})| \leq \sum_{i,j,k=1}^{d} M|h_i h_j h_k| \leq Md^3||\mathbf{h}||^3$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{Q(\mathbf{h})}{2!} + \frac{d^3(f, \mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{3!} \\ &> \frac{\beta||\mathbf{h}||^2}{2!} - \frac{Md^3||\mathbf{h}||^3}{3!} = ||\mathbf{h}||^2\left(\frac{\beta}{2!} - \frac{Md^3||\mathbf{h}||}{3!}\right). \end{aligned}$$

$\lim_{||\mathbf{h}||\to 0}\left(\frac{\beta}{2!} - \frac{Md^3||\mathbf{h}||}{3!}\right) = \frac{\beta}{2!} > 0$, tedy pro $\mathbf{h}$ dostatečně blízké počátku (na nějakém okolí $U(\mathbf{0})$) platí $\left(\frac{\beta}{2!} - \frac{Md^3||\mathbf{h}||}{3!}\right) > \frac{\beta}{4} > 0$, proto

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > ||\mathbf{h}||^2\frac{\beta}{4} > 0, \quad \mathbf{h} \neq \mathbf{0}.$$

Tedy f má v $\mathbf{a}$ lokální minimum.

ii) Pro $Q(\mathbf{h})$ negativně definitní dokážeme tvrzení podobně jako v bodě i).

iii) Nechť $Q(\mathbf{h})$ je indefinitní, pak existují $\mathbf{h}$ a $\hat{\mathbf{h}}$ takové, že $Q(\mathbf{h}) > 0$ a $Q(\hat{\mathbf{h}}) < 0$. Použijeme stejný trik jako v příkladu 3.10. Nechť $F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, pak

$$\begin{aligned} F(0) &= f(\mathbf{a}), \\ F'(t) &= d(f, \mathbf{a}+t\mathbf{h})(\mathbf{h}) \Rightarrow F'(0) = d(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = 0, \\ F''(t) &= d^2(f, \mathbf{a}+t\mathbf{h})(\mathbf{h}) \Rightarrow F''(0) = d^2(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = Q(\mathbf{h}) > 0. \end{aligned}$$

Tedy funkce F má v nule ostré lokální minimum, a proto $f(\mathbf{a}) = F(0) < F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$ pro $t \neq 0$.

Obdobně pro $\hat{F}(t) = f(\mathbf{a}+t\hat{\mathbf{h}})$ dostaneme, že funkce $\hat{F}$ má v nule ostré lokální maximum, a tedy $f(\mathbf{a}) = \hat{F}(0) > \hat{F}(t) = f(\mathbf{a}+t\hat{\mathbf{h}})$ pro $t \neq 0$.

Proto funkce f nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém.

□

Věta 3.23 *Nechť $d(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) = 0$ a $d^2(f, \mathbf{x})(\mathbf{h})$ je pozitivně (negativně) semidefinitní na nějakém okolí $U(\mathbf{a})$, pak má funkce f v bodě* **a** *lokální minimum (maximum).*

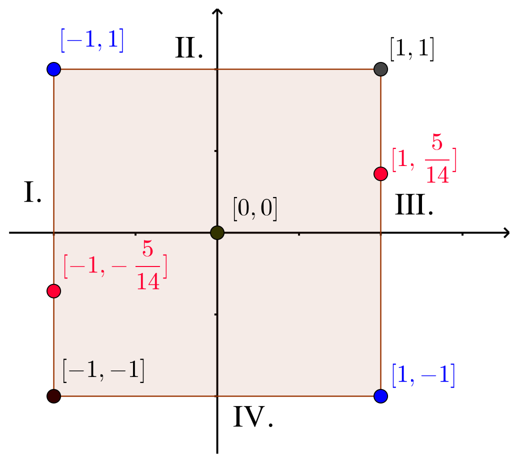
Důkaz Nechť $d^2(f, \mathbf{x})(\mathbf{h})$ je pozitivně semidefinitní na $U(\mathbf{a})$. Označme $F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, kde $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ a $\mathbf{a}+\mathbf{h} \in U(\mathbf{a})$. Pak

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(v)}{2!} &= f(\mathbf{a}) + d(f, \mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{d^2(f, \mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{2!} \\ &= f(\mathbf{a}) + \frac{d^2(f, \mathbf{a}+v\mathbf{h})(\mathbf{h})}{2!} \geq f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Tedy f má v $\mathbf{a}$ lokální minimum.

Obdobně pro lokální maximum.

□



Obrázek 3.2:
Množina M je znázorněna světle hnědým čtvercem s vyznačenými hranami I. II. III. a IV. Všechny body, ve kterých by mohl být extrém funkce, jsou rovněž vyznačeny v obrázku. Modrou barvou jsou vyznačeny body, ve kterých má funkce f minimum, červenou barvou body, ve kterých má f maximum.

3.2.3 Extrémy na množině

Příklad 3.13 *Určete extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 + 5xy - 7y^2$ *na množině* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = [-1, 1]^2$.

1. *Nejdříve se zaměříme na vnitřek množiny M. Má-li f extrém v bodě $[x_0, y_0]$, který je vnitřním bodem množiny M, pak je tento extrém lokální, a tedy* $\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = 0$. *Určeme parciální derivace funkce f, položme je rovny nule a získáme body, ve kterých by mohl být extrém funkce (bereme jen body uvnitř množiny M). $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 14y = 0$, tedy dostaneme* $[x_0, y_0] = [0, 0]$.

2. *Teď se postupně zaměříme na hrany čtverce.*

hrana I. $x = -1$, $y \in [-1, 1]$, *tedy* $f(x, y) = f(-1, y) = 1 - 5y - 7y^2$. *Hledáme extrém této funkce, tedy* $f'(y) = -5 - 14y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{14}$. *Je třeba ověřit, že tento bod leží na první hraně. Další bod, kde by mohl být extrém, je bod* $[-1, -\frac{5}{14}]$.

hrana II. $x \in [-1,1]$, $y = 1$, *tedy* $f(x,1) = x^2+5x-7$. $f'(x) = 2x+5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$, *což ale není v množině* M.

hrana III. $x = 1$, $y \in [-1,1]$, *tedy* $f(1,y) = 1 + 5y - 7y^2$. $f'(y) = 5 - 14y = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{14}$, *a tedy další hledaný bod je* $[1, \frac{5}{14}]$.

hrana IV. $x \in [-1,1]$, $y = -1$, *tedy* $f(x,-1) = x^2 - 5x - 7$, $f'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin M$.

3. Přidáme ještě všechny vrcholy, tedy body $[1,1], [1,-1], [-1,-1]$ *a* $[-1,1]$.

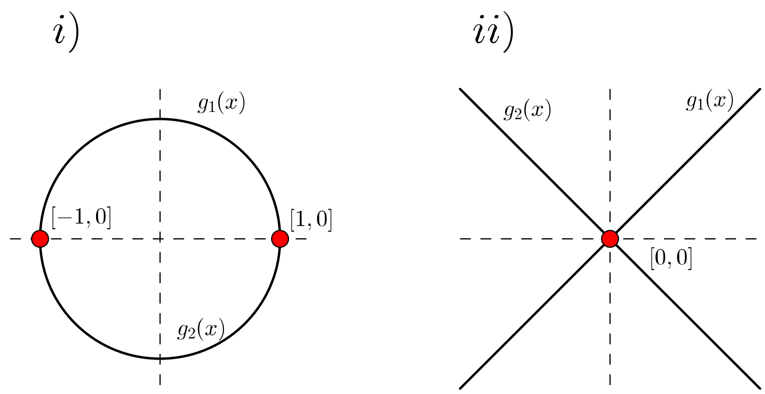
Postupně určíme hodnotu funkce f *v každém z vybraných bodů. V bodě/bodech, kde bude hodnota největší, má funkce* f *maximum na množině* M, *v bodě/bodech, kde bude hodnota nejmenší, má funkce* f *minimum.*

$$\begin{aligned} f(1,1) &= -1 \\ f(-1,1) &= -11 \\ f(-1-1) &= -1 \\ f(1,-1) &= -11 \\ f(0,0) &= 0 \\ f(-1,-\frac{5}{14}) &= 1 + \frac{25}{14} - \frac{25}{28} = \frac{53}{28} \\ f(1,\frac{5}{14}) &= \frac{53}{28}. \end{aligned}$$

Funkce f *má tedy maximum na množině* M *v bodech* $[1, \frac{5}{14}]$ *a* $[-1, -\frac{5}{14}]$ *a minimum v bodech* $[1,-1]$ *a* $[-1,1]$.

V předcházejícím příkladě jsme viděli, že k určení extrémů na množině M potřebujeme určit body, ve kterých by mohl být extrém, jak uvnitř množiny M (bod 1.), tak na její hranici (body 2. a 3.). K určování bodů uvnitř množiny M, ve kterých by mohl být extrém funkce f, nám poslouží teorie o lokálních extrémech funkce. K určování bodů na hranici M, ve kterých by mohl být extrém funkce f, si teorii vyložíme nyní.

Omezíme se zatím na funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a $M \subset \mathbb{R}^2$. Jedna z variant je popsat hranici (nebo část hranice) pomocí nějaké funkce $y = g(x)$ (v předchozím příkladě šlo třeba o funkci $y = g(x) = 1$ pro $x \in [-1,1]$, tato funkce byla použita pro popis hrany II.). Máme-li část hranice M popsanou pomocí funkce $y = g(x)$ pro $x \in I$, pak přejdeme k funkci jedné proměnné $\hat{f}(x) = f(x, g(x))$, $x \in I$. Tuto funkci můžeme derivovat a body $[x_0, g(x_0)]$, pro které platí, že $\hat{f}'(x_0) = 0$, jsou body, které hledáme.



Uvažujme pouze množiny M ve tvaru $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : F(\mathbf{x}) \leq c\}$, kde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je nějaká funkce a $c \in \mathbb{R}$. Jelikož je v tomto případě často hranice množiny M popsána rovnicí $F(x, y) = c$, zaměříme se na to, kdy lze najít funkci $g(x) = y(x)$ takovou, aby $F(x, g(x)) = c$.

Příklad 3.14 *i) Nechť $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Pak $g_1(x) = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ a $g_2(x) = y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, kde $x \in [-1, 1]$. Tedy v okolí bodů $[1, 0]$ a $[-1, 0]$ nejsme schopni popsat hranici množiny M pomocí jedné funkce proměnné x.*

ii) Nechť $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$. Pak $g_1(x) = y(x) = x$ a $g_2(x) = y(x) = -x$. Problém s nejednoznačným popisem je v počátku (bod $[0, 0]$).

iii) Nechť $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Zde je množina M pouze jednobodová, proto popis hranice pomocí funkce proměnné x není vhodný.

iv) Nechť $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$. Zde je množina M prázdná, proto nelze nalézt funkci g.

Definice 3.20 *Nechť $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Označme $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y \in \mathbb{R}$ a $M = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^d : F(\mathbf{x}, y) = 0\}$. Nechť $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$, existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0, y_0)$ takové, že množina M je na tomto okolí totožná s grafem funkce $y = g(\mathbf{x})$. Pak říkáme, že funkce g je na okolí $U(\mathbf{x}_0, y_0)$ definována implicitně rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = 0$.*

Jinak řečeno, funkce $g(\mathbf{x})$ je na okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$ zadána implicitně, jestliže $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ na nějakém okolí $U(\mathbf{x}_0)$.

Příklad 3.15 *Uvažujme množinu bodů M splňující rovnici $x^2 + y^2 = 1$, definujme funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, tedy množina M je určena rovnicí $F(x, y) = 0$. Nechť $[x_0, y_0] = [0, 1]$, pak funkce $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ je implicitně definovaná rovnicí $F(x, y) = 0$ na okolí bodu $[x_0, y_0]$, tedy $F(x, g(x)) = 0$.*

$$F'(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g'(x) = 0,$$

proto

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Věta 3.24 (O implicitní funkci) *Nechť $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y \in \mathbb{R}$ a pro nějaký bod $[\mathbf{x}_0, y_0]$ platí, že $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$.*

a) Nechť má funkce F spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial y}$ na nějakém okolí $U(\mathbf{x}_0, y_0)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$, pak existuje okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$ takové, že je rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = 0$ implicitně určena právě jedna spojitá funkce $y = g(\mathbf{x})$.

b) Nechť platí předpoklady z bodu a) a navíc má funkce F spojité parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ na nějakém okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$, pak má implicitně určená funkce g parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ v bodě $[\mathbf{x}_0]$ a platí

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0)}.$$

Tuto větu uvádíme bez důkazu.

Věta 3.25 (Metoda Lagrangeových multiplikátorů) *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $F_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kde $i = 1, ..., n < d$, mají spojité parciální derivace prvního řádu na množině $A \subset \mathbb{R}^d$. Označme $M = \{\mathbf{x} \in A : F_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } i = 1, ..., n\}$ a dále nechť má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(\mathbf{x}) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_d}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

v každém $\mathbf{x} \in M$ hodnost n. Má-li funkce f lokální extrém v $\mathbf{x}_0 \in M$ na množině M, kde $\mathbf{x}_0$ je vnitřní bod množiny M, pak existuje $\lambda = [\lambda_1, ..., \lambda_n] \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \ i = 1, ..., d.$$

Důkaz Důkaz provedeme jen pro $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : F(\mathbf{x}) = 0\}$. Použijeme značení $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) = (\hat{\mathbf{x}}, y)$, kde $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_{d-1})$ a $y = x_d$ je taková souřadnice, pro kterou platí $\frac{\partial F}{\partial x_d}(0) \neq 0$.[7] Dle věty 3.24 o implicitní funkci existuje funkce $g : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $F(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) = 0$, navíc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x_d}(\hat{\mathbf{x}}_0, y_0)}.$$

Hledáme tedy extrém funkce $f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}, y) = f(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) = \hat{f}(\hat{\mathbf{x}})$. Má-li $\hat{f}$ v $\hat{\mathbf{x}}_0$ lokální extrém, tak platí

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{x_0}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}_0, y_0), \quad i = 1, ..., d-1, \end{aligned}$$

kde $\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0)}$.

□

Příklad 3.16 *Hledejme extrém funkce $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ na množině M zadané rovnicí $x^2 + y^2 = 2$.*

I. *Nejprve použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Tedy $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. Označme $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, pak dle věty 3.25*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 10x - 6y + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 10y - 6x + 2\lambda y = 0. \end{aligned}$$

Navíc musí platit $x^2+y^2 = 2$. Máme tedy tři rovnice o třech neznámých (x, y, λ). Z prvních dvou rovnic dostaneme $y = \frac{(5+\lambda)}{3}x$ a $x = \frac{(5+\lambda)}{3}y$, tedy $y = \left(\frac{(5+\lambda)}{3}\right)^2 y$, a proto $\frac{(5+\lambda)}{3} = \pm 1$. Tedy $x = \pm y$. Z poslední rovnice pak dostaneme body $[1, 1], [1, -1], [-1, 1]$ a $[-1, -1]$. Dosazením těchto bodů do funkce f zjistíme, kde jsou extrémy funkce f na množině M.

$$\begin{aligned} f(1, 1) = f(-1, -1) = 4, \\ f(-1, 1) = f(1, -1) = 16. \end{aligned}$$

Proto má f maximum na množině M v bodech $[-1, 1]$ a $[1, -1]$ a minimum v bodech $[1, 1]$ a $[-1. -1]$.

[7] Existence takové souřadnice zaručuje nenulovost gradientu $\mathrm{grad} F(\mathbf{x}) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_d})$ na M, tedy obecně předpoklad plné hodnosti Jacobiho matice zobrazení $(F_1, ..., F_n)^T$. Pokud $\frac{\partial F}{\partial x_d}(0) = 0$, tak pouze provedeme přeznačení souřadnic tak, aby po přeznačení byla parciální derivace podle poslední souřadnice nenulová.

II. *Nyní budeme postupovat podobně jako v příkladě 3.13. Je třeba si uvědomit, že pomocí jedné funkce* $y(x)$ *a* $x \in I$ *jsme schopni vyjádřit jen část množiny* M*, viz příklad 3.14. Nechť* $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$ *pro* $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ *(vyjádření horního oblouku), pak* $\hat{f}(x) = f(x, y(x)) = 5x^2 - 6x\sqrt{2 - x^2} + 5(2 - x^2)$*. Pak*

$$\hat{f}'(x) = -6\sqrt{2 - x^2} + 6x\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{-6(2 - x^2) + 6x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{-12 + 12x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = 0.$$

Tedy $x = \pm 1$, $y = \sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$ *a dostáváme body* $[-1, 1]$ *a* $[1, 1]$*. Stejně musíme pracovat s dolním obloukem, tj. s funkcí* $y(x) = -\sqrt{2 - x^2}$*. Pro tuto funkci dostaneme další dva body* $[-1. - 1]$ *a* $[1, -1]$*. Jelikož ale nemáme vyjádření množiny* M *v okolí bodů* $[-\sqrt{2}, 0]$ *a* $[\sqrt{2}, 0]$*, pak musíme uvažovat při dosazování do funkce* f *i tyto body. V následujícím příkladě si ukážeme, jak to může dopadnout, když tak neučiníme.*

$$\begin{aligned} f(1, 1) = f(-1, -1) &= 4, \\ f(-1, 1) = f(1, -1) &= 16, \\ f(-\sqrt{2}, 0) = f(\sqrt{2}, 0) &= 10. \end{aligned}$$

Příklad 3.17 *Určete extrémy funkce* $f(x, y) = x$ *na množině* M *dané rovnicí* $x^2 + y^2 = 1$*. Na první pohled asi vidíme, že funkce* f *má maximum v bodě* $[1, 0]$ *a minimum v bodě* $[-1, 0]$*. Aplikujme však na ověření tohoto pozorování stejné metody jako v předchozím příkladě.*

I.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) &= 0 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $x = -\frac{1}{2\lambda}$*, ze druhé* $y = 0$ *(*$\lambda \neq 0$ *z první rovnice), ze třetí pak* $x = \pm 1$*, a tedy dostaneme body* $[-1, 0]$ *a* $[1, 0]$*. Prostým dosazením ověříme, že* f *má maximum v bodě* $[1, 0]$ *a minimun v bodě* $[-1, 0]$*.*

II. *Pro horní oblouk máme vyjádření* $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$*, tedy* $\hat{f}(x) = f(x, y(x)) = x$ *a* $\hat{f}'(x) = 1 \neq 0$*. Z této rovnice žádný bod nedostaneme a stejný výsledek bude i u spodního oblouku. Pokud bychom tedy zapomněli přidat krajní body oblouku* $[-1, 0]$ *a* $[1, 0]$*, pak bychom se nedobrali k výsledku.*