Kapitola 1

Úvod

1.1 Značení

- $\mathbb{N}$ ... přirozená čísla $(1, 2, 3, ...)$.
- $\mathbb{Z}$ ... celá čísla $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...)$.
- $\mathbb{Q}$ ... racionální čísla ($\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{R}$ ... reálná čísla
- $\mathbb{C}$ ... komplexní čísla

1.2 Výroky - opakování

Definice 1.1 ***Výrok*** *je formule, která má nějakou pravdivostní hodnotu (má smysl rozhodnout, zda je toto tvrzení pravdivé nebo nepravdivé). Pokud výrok platí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu* 1*, v opačném případě říkáme, že má pravdivostní hodnotu* 0*.*

Příklad 1.1 *Výrokem jsou například věty "Součet dvou sudých čísel je sudé číslo", nebo "Vsetín je největší město světa". Naopak věty "Ať žije první máj!"nebo "Učte se na zkoušky."výroky nejsou.*

Definice 1.2 *Nechť* V *a* W *jsou výroky, pak zavedeme pojmy*

- $\neg$ ... ***negace*** *(ne)*

- $\wedge$ ... ***konjunkce*** *(a)*

- $\vee$ ... ***disjunkce*** *(nebo)*

- $\Rightarrow$ ... ***implikace***

- $\Leftrightarrow$ ... ***ekvivalence***

následující tabulkou:

V	W	$\neg V$	$V \vee W$	$V \wedge W$	$V \Rightarrow W$	$V \Leftrightarrow W$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Dále zaveďme kvantifikátory

- $\exists$ ... **existenční kvantifikátor** (existuje)

- $\forall$ ... **obecný kvantifikátor** (pro všechna)

Příklad 1.2 *Negace implikovaná na výrok s kvantifikátorem:*

$$\neg(\forall x : V(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg V(x)$$
$$\neg(\exists y : W(y)) \Leftrightarrow \forall y : \neg W(y)$$

Například

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \neg(\exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) \Leftrightarrow$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : \neg(x = y + 1) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y + 1$$

1.3 Množiny - opakování

Uvedeme nepřesnou ”naivní”definici množiny (George Cantor 1845-1918).

Definice 1.3 ***Množina*** *je soubor objektů, které jsou přesně určené a různé a kde vždy nastává pouze jedna z následujících možností:*

- $a \in M$ *... a patří do množiny* M*.*

- *$a \notin M$ .. a nepatří do množiny M.*

*Tyto objekty nazveme **prvky množiny**.*

Poznámka 1.1 *Množina je svými prvky jednoznačně určena.*

Definice 1.4 *Nechť A a B jsou množiny.*

- *$A \subset B$ ... A je **podmnožina** množiny B, tj. $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.*
- *$A \cup B$ ... **sjednocení** množin A a B, tj. množina všech prvků x, které jsou alespoň v jedné z množin A, B. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$*
- *$A \cap B$ ... **průnik** množin A a B, tj. množina všech prvků x, které jsou jak v A tak v B. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$*
- *$A \setminus B$ ... **rozdíl** A a B, tj. množina všech prvků x, které leží v A a zároveň neleží v B. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$*
- *$\emptyset$ ... **prázdná množina**, tj. množina která neobsahuje žádný prvek.*

Nechť A_i jsou množiny, pak

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... = \{x : \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... = \{x : \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$

Definice 1.5 ***Kartézský součin** A a B značený $A \times B$ je množina všech uspořádáných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$, tj. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.*

Příklad 1.3 *Nechť $A = \{\{1\}, \{2\}\}$ a $B = \{\{0\}, \{3\}\}$, pak*

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}$$

.

Definice 1.6 *Nechť $K \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.*

- *Řekněme, že m je **horní odhad** (horní závora) množiny K, právě tehdy, když $\forall x \in K : x \leq m$.*
- *Řekněme, že m je **dolní odhad** (dolní závora) množiny K, právě tehdy, když $\forall x \in K : x \geq m$.*

- *Řekněme, že m je **maximální prvek** množiny K $(\max K)$, právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \leq m$.*
- *Řekněme, že m je **minimální prvek** množiny K $(\min K)$, právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \geq m$.*
- *Řekněme, že m je **supremum** množiny K $(\sup K)$, právě tehdy, když*
  - $\forall x \in K : x \leq m$,
  - $\forall m' < m \ \exists x \in K : x > m'$.
- *Řekněme, že m je **infimum** množiny K $(\inf K)$, právě tehdy, když*
  - $\forall x \in K : x \geq m$,
  - $\forall m' > m \ \exists x \in K : x < m'$.
- *Řekněme, že K je **shora omezená**, právě tehdy, když existuje horní odhad K.*
- *Řekněme, že K je **zdola omezená**, právě tehdy, když existuje dolní odhad K.*
- *Řekněme, že K je **omezená**, právě tehdy, když existuje horní i dolní odhad K $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in K : |x| < m$.*

Příklad 1.4 *$K = \{1, 2, 3\}$, pak $1 = \min K = \inf K$ a $3 = \max K = \sup K$.*

Příklad 1.5 *$K = \{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Pak $\min K = \inf K = 0$, $\sup K = 1$ a maximum K neexistuje. Skutečně, $0 \in K$ (pro $n = 1$) a $\frac{n-1}{n} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, proto $0 = \min K = \inf K$. 1 je horní závora, neboť $1 > \frac{n-1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $m < 1$, pak pro n splňující $\frac{1}{n} < 1 - m$ dostaneme, že $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > 1 - (1 - m) = m$. Proto $\sup K = 1$ a $\max K$ neexistuje.*

Příklad 1.6 *$\emptyset \neq K \subset \mathbb{Z}$, K je shora omezená, potom $\sup K \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz

Ukážeme, že $\sup K = \max K$. Nechť $\sup K \notin K$. Označme $m' = \sup(K) - 1 \Rightarrow \exists a \in K, a > m'$. Zároveň ale platí, že $a < \sup K$ (neboť $\sup K \notin K$). Pak ale $\exists b \in K$ takové, že $b > a$, tedy $\sup K - 1 < a < b < \sup K$ a zároveň $a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Příklad 1.7 *$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená množina, nechť navíc $\sup A \notin A$, pak má A nekonečně mnoho prvků.*

Důkaz

$$\begin{aligned}
&x_0 = \sup A - 1 && \Rightarrow \exists x_1 \in A : x_0 < x_1 \\
&x_1 < \sup A && \Rightarrow \exists x_2 \in A : x_1 < x_2 \\
&x_2 < \sup A && \Rightarrow \exists x_3 \in A : x_2 < x_3 \\
&\quad\vdots \\
&x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < \sup A
\end{aligned}$$

□

Následující větu uvedeme bez důkazu. Její důkaz lze nalézt např. ve skriptech Martina Rmoutila (https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ rmoutil/NMTM101/MA1.pdf).

Věta 1.1 (Existence suprema) *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbb{R}$ *má supremum.*

Kapitolu uzavřem rozšířenou definicí suprema a infima:

Definice 1.7 *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$ *je shora neomezená množina, tak její* ***supremum*** *definujeme jako* $\sup M = \infty$*. Je-li* $M \subset \mathbb{R}$ *zdola neomezená množina, tak její* ***infimum*** *definujeme jako* $\inf M = -\infty$*. Dále zavedeme* $\sup \emptyset = -\infty$ *a* $\inf \emptyset = \infty$*.*

1.4 Zobrazení

Definice 1.8 *Nechť* M, N *jsou neprázdné množiny, pak* $f \subset M \times N$ *nazýváme* ***zobrazení*** *z množiny* M *do množiny* N*, jestliže*

$$\forall x \in M \ \forall y_1, y_2 \in N : \ ([x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Pro přehlednost používáme pro zobrazení značení $f(x) = y$*.* ***Definičním oborem*** *zobrazení* f *nazýváme množinu*

$$D_f = \{x \in M : \exists y \in N : f(x) = y\}.$$

Nechť $X \subseteq D_f$*, pak* $f(X) := \{y \in N : \exists x \in X : f(x) = y\}$ *nazýváme* ***obraz*** *množiny* X *při zobrazení* f*.*

Nechť $Y \subseteq N$*, pak* $f^{-1}(Y) := \{x \in D_f : \exists y \in Y : f(x) = y\}$ *nazýváme* ***vzor*** *množiny* Y *při zobrazení* f*.*

$f(D_f)$ *nazýváme* ***obor hodnot*** *zobrazení* f *a značíme* H_f*.*

Poznámka 1.2 *Nechť M a N jsou množiny, pak symbolem $f : M \to N$ značíme fakt, že*

- *f je zobrazení z množiny M do množiny N,*
- *M je definiční obor zobrazení f,*
- *Obor hodnot f je podmnožinou množiny N.*

Poznámka 1.3 *Speciální případy:*

- *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme* ***reálnou funkcí reálné proměnné****.*
- *Je-li $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme* ***posloupností reálných čísel****.*

Definice 1.9 *Nechť $f : M \to N$.*

- *f je* ***prosté zobrazení****, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *f je* ***zobrazení na****, jestliže $\forall y \in N \ \exists x \in D_f : y = f(x)$.*
- *f je* ***bijekce****, jestliže je prosté a na.*
- *f je* ***identita*** *(značíme I), jestliže $\forall x \in D_f : f(x) = x$.*
- *f je* ***konstantní zobrazení****, jestliže $\exists c \in N$ takové, že $\forall x \in D_f : f(x) = c$.*
- *Nechť f je prosté zobrazení, pak $f^{-1} : H_f \to D_f$ takové, že $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}$, je* ***inverzní zobrazení*** *k zobrazení f.*
- *Řekněme, že zobrazení f a g se* ***rovnají****, jestliže $D_f = D_g$ a $\forall x \in D_f : f(x) = g(x)$.*
- *Nechť $D_f \subset D_g$ a $f(x) = g(x) \ \forall x \in D_f$, pak f je* ***zúžením*** *zobrazení g a g je* ***rozšířením*** *zobrazení f. Je-li $D_f = B$, značíme $f = g|_B$.*

Příklad 1.8 *Nechť $f(x) = x^2$ na celém D_f. Pak pro $D_f = \mathbb{R}^+$ je f prosté zobrazení, pro $D_f = \mathbb{R}$ f není prosté ($f(-1) = f(1)$). Nechť $D_f = \mathbb{R}$, pak pro $N = \mathbb{R}^+$ je f zobrazení na, pro $N = \mathbb{R}$ není na (např. $y = -3$).*

Definice 1.10 *Nechť $f : M \to N$, $g : N \to P$. Pak zobrazení $g \circ f : M \to P$ takové, že $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in M$, se nazývá* ***složené*** *zobrazení, kde f nazýváme* ***vnitřním*** *zobrazením a g nazýváme* ***vnějším*** *zobrazením.*

Příklad 1.9 *Nechť* $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = x^2$, *pak* $f \circ g(x) = \sin x^2$ *a* $g \circ f(x) = \sin^2 x$.

Otázka:

- Nechť $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, pak $f^{-1}(x) = \ln x$. Rovnají se zobrazení $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$?

Kapitola 2

Posloupnosti

Definice 2.1 *Zobrazení z* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{R}$ *nazýváme posloupností (reálných čísel). Značíme* $\{a_1, a_2, ...\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nebo* $\{a_n\}$.

Definice 2.2 *Posloupnost* $\{a_n\}$ *je*

- *konstantní, jestliže* $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a$.
- *rostoucí, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.
- *klesající, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.
- *nerostoucí, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
- *neklesající, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.
- *monotónní, jestliže platí jedna z předchozích variant.*
- *shora omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n < K$.
- *zdola omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n > K$.
- *omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$.

Příklad 2.1 *Posloupnost* $a_n = 3 + 2n$ *(aritmeticka posloupnost) je rostoucí, zdola omezená.*

Příklad 2.2 *Posloupnost* $a_n = \frac{n-1}{n}$ *je rostoucí a omezená. Skutečně,*

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &< n^2 \\ (n-1)(n+1) &< n^2 \\ a_n = \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

navíc $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$.

Otázka:

- Je geometrická posloupnost $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ monotónní?
- Je geometrická posloupnost omezená?

Otázka:

- Které z následujících výroků jsou ekvivalentní z výrokem: Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená?

  a) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora i zdola.

  b) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.

  c) Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.

  d) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n > n_0 :\ |a_n| < K$.

Definice 2.3 *Řekněme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* $A \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 :\ |a_n - A| < \varepsilon$. *Značíme* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *nebo* $a_n \to A$. *Řekněme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *je konvergentní, má-li vlastní limitu, tj. existuje-li* $A \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. *Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, říkáme, že diverguje (je divergentní).*

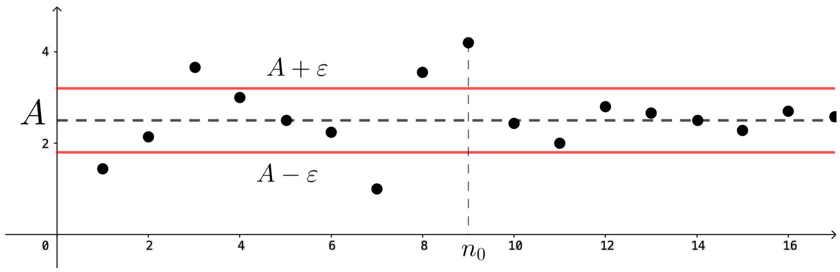
Příklad 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Důkaz

Chceme ukázat: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 :\ |\frac{n-1}{n} - 1| < \varepsilon$.

Mějme $\varepsilon > 0$ *a hledejme* n_0. *Chceme, aby* $|\frac{n-1}{n} - 1| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, *tedy* $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. $\square$



Příklad 2.4 *Posloupnost* $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \ldots$ *nemá limitu.*

Důkaz SPOREM: Nechť existuje limita této posloupnosti. Označme ji A*. Zvolme* $\varepsilon = \frac{1}{4}$*, pak* $|a_{2n-1} - A| = |1 - A| < \frac{1}{4} \Rightarrow A \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$*. Zároveň platí, že* $|a_{2n} - A| < \frac{1}{4}$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{2n} \leq \frac{1}{2}$*, tedy* $A \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$ *SPOR.*

Otázka:
Rozhodněte o platnosti tvrzení: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$.

Odpověď: Tvrzení je pravdivé. *Důkaz*

($\Rightarrow$) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tak $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$, tedy stačí volit $K = 1$.

($\Leftarrow$) Nechť existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon}$. A mějme $\varepsilon > 0$. Pak pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

□

Otázka:
Které z následujících výroků jsou ekvivalentní s výrokem: "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"?

i) $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| > K$.

ii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iv) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - A| > \varepsilon$.

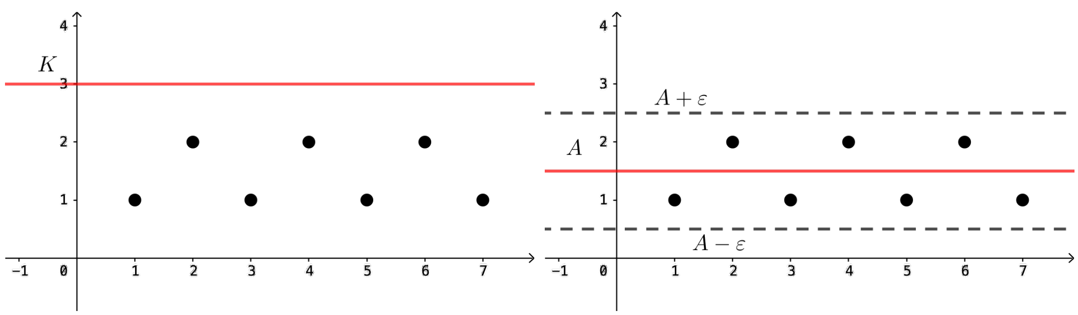
Odpověď: Ekvivalentní je pouze výrok iii). Výrok i) je negací omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy posl. $\{a_n\}$ není omezená, když splňuje podmínku i). To sice již implikuje, že posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní, ale není to ekvivalentní výrok.

Příklad omezené divergentní posloupnosti je na následujícím obrázku. Podmínka ii) také zaručuje, že posloupnost $\{a_n\}$ bude divergovat, ale není ekvivalentní s tvrzením, že je posloupnost divergentní (existují divergentní posloupnosti, které tuto podmínku nesplňují viz následující obrázek). Poslední podmínku nesplňuje žádná posloupnost. Stačí zvolit $A = a_1$ (nebo zvolit za A libovolný jiný člen posloupnosti $\{a_n\}$). Příklady divergentních posloupností, které nesplňují podmínky i) a ii) jsou znázorněny na následujícím obrázku.

Ukážeme si ekvivalenci výroku "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"s bodem iii). Posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní právě tehdy, když není konvergentní, tedy když nemá vlastní limitu. Tedy

$$\begin{aligned}\forall A \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n \neq A &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} : \neg(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 : |a_n - A| \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že zda je zde nerovnost $|a_n - A| \geq \varepsilon$ ostrá či neostrá nehraje roli. Existuje-li $\varepsilon > 0 : |a_n - A| > \varepsilon$, pak platí i $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Existuje-li $\varepsilon > 0$ splňující $|a_n - A| \geq \varepsilon$, pak pro $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ platí ostrá nerovnost (a tedy existuje i $\tilde{\varepsilon} > 0$, pro které platí ostrá nerovnost).



Definice 2.4 *Řekneme, že posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*), jestliže* $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : a_n > K($*resp.* $a_n < K)$*. Píšeme* $\lim_{n\to\infty} = \infty$ *(resp.* $\lim_{n\to\infty} = -\infty$*).*

Příklad 2.5 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$*. Stačí zvolit* $n_0 = \lceil K \rceil$*.*

Věta 2.1 *(o jednoznačnosti limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz

- Nechť $a_n \to A$, $a_n \to B$ a $A \neq B$ (obě limity vlastní). BÚNO $B > A$, volme $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ $|a_n - A| < \frac{B-A}{3}$ a $|a_n - B| < \frac{B-A}{3}$, tedy $a_n \in (A - \frac{B-A}{3}, A + \frac{B-A}{3}) \cap (B - \frac{B-A}{3}, B + \frac{B-A}{3}) = \emptyset \Rightarrow$ SPOR.
- Nechť $a_n \to A$ je vlastní a zároveň $a_n \to \infty$. Pak pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 :$ $|a_n - A| < \varepsilon$ a zároveň pro každé $K \in \mathbb{R}$ $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > \tilde{n}_0 : a_n > K$. Zvolme $K > a + \varepsilon$, pak pro $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $a_n < a + \varepsilon$ a zároveň $a_n > a + \varepsilon \Rightarrow$ SPOR. Obdobně pro $a_n \to A$ a $a_n \to -\infty$.
- Nechť $a_n \to \infty$ a $a_n \to -\infty$. Zvolme libovolné $K \in \mathbb{R}$, pak $a_n > K$ pro $n > n_0$ a zároveň $a_n < K$ pro $n > \tilde{n}_0 \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Věta 2.2 *(o limitě monotónní posloupnosti) Nechť a_n je monotónní posloupnost.*

i) Je-li posloupnost a_n omezená, pak existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) Je-li posloupnost a_n neomezená neklesající, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

iii) Je-li posloupnost a_n neomezená nerostoucí, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Důkaz

i) a_n omezená a neklesající, pak existuje $s = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje a_{n_0} takové, že $a_{n_0} > s - \varepsilon$, tedy $\forall n > n_0$ platí $s - \varepsilon < a_n \leq s$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Obdobně pro nerostoucí posloupnosti.

ii) Je-li a_n neklesající a neomezená, pak $a_n \geq a_1$, tedy a_n je omezená zdola $\Rightarrow a_n$ není omezená shora. Zvolme K, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > K$, z monotónie plyne $a_n \geq a_{n_0} > K$ $\forall n > n_0$.

iii) Důkaz obdobně jako v předešlém případě.

$\square$

Věta 2.3 *Každá konvergentní posloupnost je omezená. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), pak je posloupnost a_n omezená zdola (resp. shora).*

Důkaz

- Nechť a_n je konvergentní, pak existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0$: $|a_n - A| < 1$, tedy $\forall n > n_0$: $a_n < A + 1$. Pro $M = \max\{a_1, a_2, ..., a_{n_0}, A + 1\} + 1$ tedy platí, že $\forall n \in \mathbb{N} :$ $a_n < M$.

- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak stačí zvolit K, k němu najdeme n_0 takové, že $a_n > K$ $\forall n > n_0$, a zvolme $M = \min\{a_1, ..., a_{n_0}, K\} - 1$. Pak $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > M$. Obdobně u nevlastní limity $-\infty$.

$\square$

Věta 2.4 *Uvažujme posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : a_n = b_n$. *Pak platí:*

i) *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\ (-\infty)$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty\ (-\infty)$.

Důkaz

i) Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n > n_0$ platí $a_n = b_n$, tak $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : |b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) Mějme $K \in \mathbb{R}$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : a_n > K$. Tedy $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : b_n = a_n > K$, proto $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

$\square$

Poznámka 2.1 *Předchozí větu lze interpretovat i takto. Změníme-li u posloupnosti* $\{a_n\}$ *konečně mnoho členů, tak její limitu nezměníme.*

Definice 2.5 *Označme* $\mathbb{R}^*$ *množinu* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Věta 2.5 *(o dvou policajtech) Nechť* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou tři posloupnosti, pro něž platí*

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :\ a_n \le b_n \le c_n$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}^*$,

pak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Důkaz

- $A \in \mathbb{R}$. Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$ a také existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_2 : |c_n - A| < \varepsilon$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1, n_2\} : \; A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak $\forall n > n_0$: $b_n \geq a_n > K$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Obdobně pro $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

□

Věta 2.6 *Nechť posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *mají limity (vlastní či nevlastní) a* $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq b_n$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Důkaz

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, pak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n > q > \lim_{n\to\infty} b_n$. Tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $(a_n > q \wedge b_n < q)$, což je spor s předpokladem $a_n \leq b_n$.

□

Otázka:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A < \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

Odpověď: Z předpokladu lze odvodit tvrzení i), iii) a iv). Stačí ukázat, že platí tvrzení iii), jelikož to přímo implikuje platnost tvrzení i) a iv). Důkaz platnosti tvrzení iii) je téměř stejný, jako důkaz předcházející věty, ale rozepíšeme ho trochu podrobněji. Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, tak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n < q < \lim_{n\to\infty} b_n$. To lze ukázat například rozborem možností. Pro $A, B \in \mathbb{R}$ můžeme volit $q = \frac{B-A}{2}$, pro $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$ lze použít třeba volbu $q = B - 1$. Rozbor dalších variant necháme na čtenáři. Existenci $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že $\forall n > n_1 : a_n < q$ dostaneme vhodnou volnou ε pro $A \in \mathbb{R}$ (např. $\varepsilon = q - A$) či volnou K pro $A = -\infty$ (např. $K = q$). Obdobně existuje $n_2 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_2 : q < b_n$. Pak pro všechna $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\} : \; a_n < q < b_n$, čímž je důkaz hotov. Neplatnost druhého tvrzení lze ukázat na protipříkladu, např. u konstantních posloupností $\{a_n = -2\}$ a $\{b_n = 1\}$.

Otázka:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \leq \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

Odpověď: Příklad posloupností, kde $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n = \frac{1}{n} \wedge b_n = -\frac{1}{n}$ ukazuje, že z předpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = A \leq \lim_{n\to\infty} b_n = B$ nelze vyvodit ani jedno z tvrzení i)-iv).

Věta 2.7 *(o limitě součtu) Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Důkaz
Mějme $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > \tilde{n}_0 : |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Věta 2.8 *(o limitě součinu) Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n - A)(b_n - B) + Ab_n + a_n B - 2AB| \\ &= |(a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leq |(a_n - A)(b_n - B)| + |A(b_n - B)| + |(a_n - A)B| \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon > 0$ stačí najít n_0^1, n_0^2 a n_0^3 takové, že:

- $\forall n > n_0^1 : |(a_n - A)(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^2 : |A(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^3 : |B(a_n - A)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pak $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2, n_0^3\}$.

$\square$

Lemma 2.9 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

Důkaz

BÚNO $B > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : b_n > \frac{B}{2}$.

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right| \leq \frac{2|B - b_n|}{B^2} \quad \forall n > n_0.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť pro $\forall n > \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ platí $|B - b_n| < \frac{\varepsilon B^2}{2}$, pak

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}.$$

$\square$

Věta 2.10 *(o limitě podílu) Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důkaz

Viz lemma 2.9 a věta 2.8

$\square$

Otázka:

Nechť $A \in \mathbb{R}$. Který z následujících výroků je ekvivalentní výroku $\lim_{n\to\infty} a_n = A$?

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

Odpověď: Oba výroky jsou ekvivalentní s výrokem $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Stačí pracovat s tím, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a pak si uvědomit, že $(|a_n - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|(a_n - A) - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow ||a_n - A| - 0| < \varepsilon$.

Otázka:

Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $A \in \mathbb{R}$. Jsou následující výroky ekvivalentní?

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Odpověď: Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : ||a_n| - |A|| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. Zde vycházíme s nerovnosti $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Mějme $\{a_n = (-1)^n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, ale $\lim_{m\to\infty} |a_n| = 1$. Na tomto protipříkladu vidíme, že výrok $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$ neimplikuje výrok $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy výroky nejsou ekvivalentní.

Lemma 2.11 *Je-li posloupnost a_n omezená zdola (resp. shora) a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty\ (\textit{resp.}\ -\infty).$$

Důkaz

Existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > L$ a $\forall K\ \exists n_0 \forall n > n_0 : b_n > K$.

Mějme $M \in \mathbb{R}$, pak pro volbu $K = M - L$ dostáváme $\forall n > n_0 :\ a_n + b_n > L + K = L + (M - L) = M$, tedy $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

□

Lemma 2.12 *Je-li* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená posloupnost, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Důkaz

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$ a $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$.

Mějme $\varepsilon > 0$, pak $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| K \leq \varepsilon K$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

□

Lemma 2.13 *Uvažujme posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$.

i) Existuje-li $\alpha > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 :\ a_n \geq \alpha$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty\ (\textit{resp.}\ -\infty).$$

ii) Existuje-li $\alpha < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n \leq \alpha$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty\ (\textit{resp.}\ +\infty).$$

iii) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$(resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty\ (\textit{resp.}\ \mp\infty).$$

Důkaz

i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_1\ \forall n > n_1 : b_n > K$.

Mějme $M > 0$ a volme $K = \frac{M}{\alpha}$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : a_n b_n > \alpha K = M$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

ii) Viz i)

iii) Plyne z i) a ii).

□

Lemma 2.14 *Nechť je* $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

Důkaz

$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |b_n| > K$.

Mějme $\varepsilon > 0$, pak pro volbu $K = \frac{1}{\varepsilon}$ dostáváme: $\forall n > n_0 : \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| = \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

□

Lemma 2.15 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n > 0$ (*resp.* $b_n < 0$) $\forall n > n_0$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \ (\textit{resp.} \ -\infty).$$

Důkaz

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_1 : |b_n| < \varepsilon$. Přidáme-li předpoklad $\forall n > n_0 : b_n > 0$, dostaneme $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : 0 < b_n < \varepsilon$.

Mějme $K > 0$, pak pro volbu $\varepsilon = \frac{1}{K}$ dostaneme, že $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : \frac{1}{b_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$.

□

Definice 2.6 *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ definujme*

$$\begin{aligned} -\infty < a &< \infty \\ a \pm \infty &= \pm\infty \\ a(\pm\infty) &= \pm\infty \quad \textit{pro } a > 0 \\ a(\pm\infty) &= \mp\infty \quad \textit{pro } a < 0 \\ \frac{a}{\pm\infty} &= 0 \\ \frac{\pm\infty}{b} &= \pm\infty \quad \textit{pro } b > 0 \\ \frac{\pm\infty}{b} &= \mp\infty \quad \textit{pro } b < 0 \\ |\pm\infty| &= \infty \\ +\infty + \infty &= \infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \\ +\infty \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\ -\infty \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \end{aligned}$$

Nedefinujeme výrazy: $0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, 0^0, ∞^0 a 1^∞.

Věta 2.16 *(aritmetice limit) Nechť a_n, b_n jsou posloupnosti, potom platí:*

i)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

ii)
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

iii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},$$

pokud jsou pravé strany definovány.

iii') Je-li $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (resp. < 0), pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \ (\textit{resp. } -\infty).$$

iii") Je-li $b_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ *(resp.* < 0*), pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty \ (\textit{resp.} \ +\infty).$$

Důkaz

i) Viz. věta 2.7 (vlastní limity), věta 2.3 a lemma 2.11 (nevlastní limity).

ii) Viz. věta 2.8 (vlastní limity), lemma 2.13 (nevlastní limity).

iii), iii') a iii") Viz. věta 2.10 (vlastní limity), ii) + lemma 2.14 a lemma 2.15 (nevlastní limity).

□

Příklad 2.6 *Nechť* $a_n = n$ *a* $b_n = k - n$*, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = k$*. Ale tuto limitu nelze určit z limit* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *(neurčitý výraz* $\infty - \infty$*).*

Příklad 2.7 *Nechť* $a_n = n$ *a* $b_n = \frac{k}{n}$*, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = k$*. Ale tuto limitu nelze určit z limit* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *(neurčitý výraz* $\infty \cdot 0$*).*

Příklad 2.8 *Nechť* $a_n = n$ *a* $b_n = n^2$*, pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$*. Je-li naopak* $a_n = n^2$ *a* $b_n = n$*, pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$*. Pro* $a_n = kn$ *a* $b_n = n$ *zase dostaneme* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$*. Vždy jde o neurčitý výraz* $\frac{\infty}{\infty}$*.*

Příklad 2.9 *Uvažujme* $a > 0$*. Pro* $a_n = \frac{1}{n}$ *dostaneme* $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot n = \infty$*. Pro* $a_n = \frac{-1}{n}$ *je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n} = -\infty$ *a pro* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *limita* $lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_n}$ *neexistuje. Vždy jde o neurčitý výraz* $\frac{a}{0}$*.*

Příklad 2.10 *Dokažte, že*

a) $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ *pro* $a > 1$,

b) $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ *pro* $k \in \mathbb{Z}, a > 1$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ *pro* $a \in \mathbb{R}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, *g)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^k} = 0$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz

a) $a^n > K \Rightarrow n > \log_a K$.

b) $n! \geq n$ *a* $n \to \infty$.

c) *Jelikož* $\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} = \frac{n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k}}{a^{n+1}} = \frac{n^k}{a^n} \frac{1+\binom{k}{1}/n + \ldots \binom{k}{k}/(n^k)}{a}$ *a* $\frac{1+\binom{k}{1}/n+\ldots\binom{k}{k}/(n^k)}{a} \to \frac{1}{a} < 1$, *pak* $a_n > a_{n+1}$ *pro* n *dostatečně velké* $\Rightarrow$ *existence vlastní limity* ($\{a_n\}$ *klesající a nezáporná). Je-li* $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to} a_n \frac{1}{a} = \frac{\alpha}{a}$, *tedy* $\alpha = 0$.

d) $a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \frac{a}{n+1} = a_n \frac{a}{n+1}$, *tedy* $a_n > a_{n+1}$ *pro* $n > a-1$ *a* $lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$.

e) *Jelikož* $\sqrt[n]{n} > 1$, *pak* $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, *tedy* $n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > \binom{n}{2} h_n^2$ $\Rightarrow h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, *proto* $h_n \to 0$, *a tedy* $\sqrt[n]{n} \to 1$.

f) *Nejdříve si odvodíme pomocnou nerovnost pro* $n!$. *Je-li* n *sudé, pak* $n = 2k$ *a tedy* $n! = (2k)! = 2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 > k \cdot k \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = k^{k+1} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$. *Pro* n *liché máme* $n = 2k-1$, *tedy* $n! = (2k-1)! = (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot \ldots \cdot (2k-k) \cdot (2k-k-1) \cdot \ldots \cdot 1 > k \cdot k \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = k^k = \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}$. *Z těchto nerovností dostaneme nerovnost* $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$. *Tedy* $\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$. *Jelikož* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty$, *tak i* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

g) *Dokážeme později.*

$\square$

Příklad 2.11 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, *ale* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. *Oba dva případy reprezentují neurčitý výraz* 0^0.

Příklad 2.12 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, *ale* $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{\ln n}} = e^1 = e$. *Oba dva případy reprezentují neurčitý výraz* ∞^0.

Definice 2.7 *Označme*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Tomuto číslu říkáme Eulerovo číslo.

Poznámka 2.2 *Aby byla předchozí definice korektní, bylo by třeba ukázat, že* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *existuje. Důkaz existence této limity lze nalézt třeba ve skriptech L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze), 2019.*

Příklad 2.13

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Definice 2.8 *Nechť* $\{a_n\}$ *je reálná posloupnost a* $k_1, k_2, \ldots$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost* $\{b_n = a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *nazýváme vybranou (pod)posloupností z posloupnosti* $\{a_n\}$.

Otázka:
Nechť je $\{k_n\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Platí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : k_n \geq n$?

Odpověď: Ano. Pro $n = 1$ je $k_1 \geq 1$ (jelikož je $k_1 \in \mathbb{N}$). Nechť pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $k_n \geq n$. Jelikož $k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ a $k_{n+1} > k_n$, tak $k_{n+1} \geq k_n + 1$. Tedy z nerovnosti $k_n \geq n$ dostaneme $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$. Tím je důkaz indukcí hotov.

Věta 2.17 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, *pak každá vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$ *má také limitu* A.

Důkaz

Nechť $A \in \mathbb{R}$, pak $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\ \forall n > n_0$, a proto $a_{k_n} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\ \forall n > n_0$, jelikož $k_n \geq n$. Obdobně pro nevlastní limitu.

□

Otázka:
Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

b) Mějme $m \in \mathbb{N}$ a nechť je posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

c) Nechť konverguje každá vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

d) Nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \in \mathbb{R}^*$ a platí rovnost $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Odpověď:

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, ale limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

b) Tvrzení platí. Posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, tedy $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_{m+n} - A| < \varepsilon$. Tedy $\forall n > (n_0 + m) : |a_n - A| < \varepsilon$.

c) Tvrzení platí. Stačí si uvědomit, že $\{a_n\}$ je také vybraná posloupnost z $\{a_n\}$.

d) Tvrzení platí. Pro $A \in \mathbb{R}$ dostaneme, že $\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : (|a_{2n} - A| < \varepsilon \wedge |a_{2n+1} - A| < \varepsilon)$, tedy $\forall n > 2n_0 + 1 : ||a_n - A| < \varepsilon)$. Podobně pro $A = \pm\infty$.

Příklad 2.14 *Uvažujme posloupnost $a_n = (-1)^n$. Pak lze ukázat, že $\lim a_n$ neexistuje. Stačí si uvědomit, že $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ a $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$. Tedy dvě podposloupnosti této posloupnosti mají různé limity. Pokud by posloupnost $\{a_n\}$ měla limitu A, tak by dle předchozí věty musely platit obě rovnosti $A = 1$ a $A = -1$, což není možné.*

Definice 2.9 *Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, pokud existuje vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ označíme $H(\{a_n\})$.*

Uvedeme si následující větu bez důkazu.

Věta 2.18 *Mějme posloupnost reálných čísel, pak $H(\{a_n\}) \subseteq \mathbb{R}^*$ má maximum i minimum.*

Poznámka 2.3 *Poznamenejme, že pro shora neomezenou posloupnost $\{a_n\}$ je $\max H(\{a_n\}) = \infty$ a pro zdola neomezenou posloupnost $\{a_n\}$ je $\min H(\{a_n\}) = -\infty$. Tedy v předchozí větě připouštíme i variantu $\max H(\{a_n\}) = \infty$ (jelikož $H(\{a_n\}) \subseteq \mathbb{R}^*$, nikoliv pouze $H(\{a_n\}) \subseteq \mathbb{R}$).*

Otázka:
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost přirozených čísel. Platí následující tvrzení?

a) Nechť $\{a_{k_n}\}$ je nějaká podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{k_n}\})$.

b) $H(\{a_n\}) = H(\{a_{2n}\})$ (Množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ se rovná množině hromadných hodnot posloupnosti $\{a_{2n}\}$, tj. posloupnosti sudých členů z posloupnosti $\{a_n\}$).

c) Mějme $m \in \mathbb{N}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

Odpověď:

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $H(\{a_n\}) = \{1, -1\}$, ale $H(\{a_{k_n}\}) = \{1\}$.

b) Toto tvrzení neplatí, viz bod a).

c) Tvrzení platí. Jelikož $\{a_{m+n}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak každá podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}$ je také podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy $H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}) \subseteq H(\{a_n\})$. Nechť $A \in H(\{a_n\})$, pak existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$, která má limitu $A = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$. Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : k_{m+n} \geq m + n$, tak $\{a_{k_{m+n}}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ a jelikož $\lim_{n\to\infty} a_{k_{n+m}} = A$ (věta 2.17), pak $A \in H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$, tedy $H(\{a_n\}) \subseteq H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

Definice 2.10 *Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Pak limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ budeme nazývat největší hromadnou hodnout této posloupnosti a budeme ho značit $\limsup_{n\to\infty} a_n$, tedy*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}).$$

Nejmenší hromadnou hodnotu této posloupnosti nazýváme limes inferior a značíme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}).$$

Poznámka 2.4 *Limes superior a limes inferior lze také definovat následujícím způsobem:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ +\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora neomezená,} \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k > n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Důkaz

- Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená, pak $(\forall L \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N} : a_n > L) \Rightarrow (\forall L \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \exists n > m : a_n > L)$. Tedy lze vytvořit podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$ následujícím způsobem: $a_{k_1} = a_1$ a $k_n := \{m; m > k_{n-1}, a_m > n\}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$, tedy $\infty \in H(\{a_n\})$, proto $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}) = \infty$.

- Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a označme $A = \max H(\{a_n\})$. Pak $A \in \mathbb{R}$ a existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ konvergující k A (pokud by $A = \infty$, pak existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ divergující k nekonečnu, a tedy by posloupnost $\{a_n\}$ nebyla shora omezená). Jelikož $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n_0 : a_{k_m} > A - \varepsilon$, pak $\sup\{a_{k_m}; m > n\} \geq A$, navíc $\{a_{k_m}; m > n\} \subseteq \{a_k; k > n\}$, tedy $\sup\{a_k; k > n\} \geq \sup\{a_{k_m}; m > n\} \geq A$, a proto $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\} \geq A$.

  Označme $B = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\}$ a zvolme $k_1 = 1$. Postupně volme k_n následujícím způsobem. Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m > n_0$: $|\sup\{a_k; k > m\} - B| < \frac{1}{n}$. Označme $m' = \max\{n_0 + 1, k_{n-1} + 1\}$, pak i $|\sup\{a_k; k > m'\} - B| < \frac{1}{n}$, a tedy existuje $k > m'$ takové, že $B - \frac{1}{n} < a_k \leq B$. Při volbě $k_n = k$ dostaneme posloupnost $\{a_{k_n}\}$, která konverguje k B, a tedy je $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k > n\} = B \leq A$. Tím je důkaz hotov.

□

Poznámka 2.5 *Lze dokázat následující tvrzení:* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\limsup_{n\to\infty} a_n = A = \liminf_{n\to\infty} a_n)$.

Kapitola 3

Funkce

Definice 3.1 *Reálnou (komplexní) funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).*

Příklad 3.1

$$f(x) = \sqrt{x}$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. $D_f = [0, \infty)$ (definiční obor), $H_f = [0, \infty)$ (obor hodnot), (prosté zobrazení).

$$f(x) = x^2$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$ (definiční obor), $H_f = [0, \infty)$ (obor hodnot).

$$f(x) = x^3$$

je zobrazení z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$ (definiční obor), $H_f = \mathbb{R}$ (obor hodnot).

Které funkce již známe:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

je racionální funkce.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

je inverzní fce k $f(x) = x^2$ na $[0, \infty)$.

$$f(x) = \sin x, \cos x, \mathrm{tg} x, \mathrm{cotg} x$$

(goniometrické funkce) mají inverzní fce $\arcsin x, \arccos x, ...$

$$f(x) = e^x$$

je inverzní fce k $\ln x$ a $a^x := e^{x \ln x}$ pro $a > 0$.

Definice 3.2 *Nechť f_1 a f_2 jsou dvě funkce. Potom jejich součtem $f_1 + f_2$, rozdílem $f_1 - f_2$, součinem $f_1 \cdot f_2$ a podílem $\frac{f_1}{f_2}$ nazveme funkce:*

$$\begin{aligned}
(f_1 \pm f_2)(x) &= f_1(x) \pm f_2(x), \quad x \in D_{f_1 \pm f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2}, \\
(f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x) \cdot f_2(x), \quad x \in D_{f_1 \cdot f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2}, \\
\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad x \in D_{\frac{f_1}{f_2}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \setminus \{x : f_2(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

Definice 3.3 *Funkce f se nazývá omezená na $M \subset D_f$, je-li množina $\{f(x)\}_{x \in M}$ omezená.*

Příklad 3.2 *Funkce $f = \frac{1}{x}$ je omezená na $[1, \infty)$, ale není omezená na $(0, 1]$.*

3.1 Limita a spojitost funkce

Definice 3.4 *Nechť f je nějaká funkce a $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je limita funkce f v bodě a právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$. Používáme značení $\lim_{x \to a} f(x) = A$.*

Poznámka 3.1 *Z definice je patrné, že limita funkce f v bodě a nezávisí na hodnotě funkce f v bodě a. Funkce f nemusí být dokonce ani definovaná v bodě a.*

Definice 3.5 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Následujícím způsobem zavedem pojem okolí bodu.*

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(a) &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{... } (\varepsilon\text{-ové) okolí bodu } a, \\
U^*_\varepsilon(a) &= U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \quad \text{... } (\varepsilon\text{-ové) prstencové okolí bodu } a, \\
U_\varepsilon(\infty) &= (\frac{1}{\varepsilon}, \infty) \quad \text{... okolí bodu } +\infty, \\
U_\varepsilon(-\infty) &= (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \quad \text{... okolí bodu } -\infty.
\end{aligned}$$

Definice 3.6 *Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$, pak limita funkce f v bodě a je A (značení $\lim_{x \to a} f(x) = A$) právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U^*_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$.*

Příklad 3.3 *Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, pak z předchozí definice dostaneme*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) = A &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U^*_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy obecná definice limity (3.5) odpovídá předešlé definici (3.4) pro $a, A \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.4 *Ukažte, že* $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. *Mějme* $\varepsilon > 0$, $|x^2-4| \leq |x-2||x+2| \leq \delta(4+\delta)$ *pro* $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, *tedy* $\varepsilon = \delta^2 + 4\delta$, *a tedy* $\delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2$.

Definice 3.7 f *se nazývá spojitá v bodě* $a \in D_f$, *je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Věta 3.1 *(Heineho věta)*

i) *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $a, A \in \mathbb{R}^*$, *pak pro každou posloupnost* $\{x_n\}, x_n \neq a$ *a* $x_n \to a$ *platí, že*
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

ii) *Nechť pro každou posloupnost* $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ *a* $x_n \to a$, *má posloupnost* $\{f(x_n)\}$ *limitu. Pak limity všech těchto posloupností jsou stejné a jejich společná limita* A *je také limitou funkce* f *v bodě* a.

Důkaz

i) Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in U_\delta(a)^* : f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Jelikož $x_n \neq a$ a $x_n \to a$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0 : x_n \in U_\delta(a)^*$, proto $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ pro všechna $n > n_0$.

ii) Mějme dvě posloupnosti $x_n \neq a$, $x_n \to a$ a $y_n \neq a$, $y_n \to a$. Pak pro posloupnost $z_n : x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ platí: $z_n \neq a$ a $z_n \to a$. Jelikož $\lim f(z_n)$ existuje a posloupnosti $\{f(x_n)\}$ a $\{f(y_n)\}$ jsou vybrané posloupnosti z $\{f(z_n)\}$, pak $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ (dle věty 2.17).

Předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ pro všechna $x_n \neq a$, $x_n \to a$, kde $a, A \in \mathbb{R}$. Pro ostatní případy necháme důkaz na čtenáři. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Dokážeme sporem.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Tedy nechť

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) : |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Pak $\exists\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n \in (a - \frac{1}{n}, a) \cup (a, a + \frac{1}{n}) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Tedy $x_n \neq a$, $x_n \to a$, ale $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Poznámka 3.2 *Věty o limitách posloupností se dají převést pomocí Heineovy věty na věty o limitách funkcí.*

Věta 3.2 *(aritmetice limit pro funkce) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a uvažujme funkce f a g. Pak:*

i)

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

ii)

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

iii)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

mají-li pravé strany smysl.

Důkaz

i) Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$.

   a) Mějme posloupnost x_n, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak dle věty 3.1.i) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$.

   b) Dle věty 2.16.i) $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty} g(x_n) = A + B$.

   c) Dle věty 3.1.ii) také $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x_n) + g(x_n)] = A + B$.

ii) Podobně jako první část.

iii) Podobně jako první část.

$\square$

Heineho věta nám umožňuje dokázat i další věty o limitách funkcí z již dokázaných vět o limitách posloupností. Tyto věty si teď zformulujeme. Důkaz by probíhal obdobně jako u předešlé věty, tak už zde nebudeme tyto věty dokazovat a ponecháme jejich důkaz jako cvičení.

Věta 3.3 *(o jednoznačnosti limity funkce) Každá funkce má v každém bodě maximálně jednu limitu.*

Věta 3.4 *(o dvou policajtech) Uvažujme funkce f, k, l a bod $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť existuje okolí $U^*_\delta(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_\delta(a) : (k(x) \le f(x) \le l(x))$. Pokud navíc platí rovnost $\lim_{x\to a} k(x) = \lim_{x\to a} l(x) = A$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = A$.*

Věta 3.5 *Uvažujme funkce f, k a bod $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť existuje okolí $U^*_\delta(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_\delta(a) : k(x) \le f(x)$. Pokud navíc existují limity $\lim_{x\to a} k(x)$ a $\lim_{x\to a} f(x)$, pak $\lim_{x\to a} k(x) \le \lim_{x\to a} f(x)$.*

Příklad 3.5 *Heineho věta nám může pomoci i u početních příkladů. Můžeme s její pomocí ukázat, že funkce $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ nemá limitu v bodě $a = 0$. Stačí zvolit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ a $y_n = \frac{1}{\pi(1+2n)}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1 \ne -1 = \lim_{n\to\infty} \cos((1+2n)\pi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Tedy limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.*

Poznámka 3.3 *Z vět o limitách plynou věty o spojitosti. Speciálně jsou-li f, g spojité, jsou spojité také $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, a to tam, kde mají smysl.*

Definice 3.8 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak zavedeme pojmy pravé a levé okolí bodu a následujícím způsobem:*

- $U^*_{\varepsilon,-}(a) = (a - \varepsilon, a)$ ... *levé okolí bodu a,*
- $U^*_{\varepsilon,+}(a) = (a, a + \varepsilon)$ ... *pravé okolí bodu a.*

Pro $A \in \mathbb{R}^*$ řekneme, že limita funkce f v bodě a zprava je rovna A (značení $\lim_{x\to a+} f(x) = A$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U^*_{\delta,+}(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Podobně řekneme, že limita funkce f v bodě a zleva je rovna A (značení $\lim_{x\to a-} f(x) = A$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U^*_{\delta,-}(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Funkce f je v bodě a spojitá zprava (resp. zleva) jestliže $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$).

Otázka:
Platí následující tvrzení?

a) Nechť $A, a \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\lim_{x\to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = A)$

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak je-li x_1 blíže k a než x_2, je $f(x_1)$ k A blíže než $f(x_2)$.

c) Nechť $\forall x_n = 10^{-n}$ platí $f(x_n) = 0$, pak $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

d) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

   i) existuje,

   ii) neexistuje,

   iii) nemáme dost informací.

Otázky b), c) a d) byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.htm

Odpověď:

a) Ano.

b) Ne. Pro $f(x) = \sin x \cdot x$ je $\lim_{n\to 0} f(x) = 0$ (věta o dvou policajtech), ale $f(\pi) = 0$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

c) Ne. Nechť $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$, pak pro všechna x_n platí $f(x_n) = 0$, ale limita $\lim_{x\to 0+} f(x)$ neexistuje.

d) iii) Pro $f(x) = g(x) = (x-a)$ je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ale pro $f(x) = (x-a)$ a $g(x) = (x-a)^2$ limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

3.2 Monotónní funkce

Definice 3.9 *Říkáme, že f je neklesající (nerostoucí) na množině $M \subset D_f$, jestliže $\forall x_1 < x_2 \in M$ $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Všechny takové funkce nazýváme monotónními na M.*

Říkáme, že f je klesající (rostoucí) na množině $M \subset D_f$, jestliže $\forall x_1 < x_2 \in M$ $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Všechny takové funkce nazýváme ryze monotónními na M.

Definice 3.10 *Nechť $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.*

- *Supremem, maximem, infimem, minimem reálné funkce f na množině M nazýváme supremum, maximum, infimum, minimum množiny $\{f(x)\}_{x\in M}$.*

Věta 3.6 *Buď f neklesající na* (a, b), *pak existují limity* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a^+} f(x)$. *Navíc platí* $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$.

Důkaz Označme $A = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

a) Je-li f shora omezená, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) > A-\varepsilon$. Pro $x \in (x_0, b)$ platí $A - \varepsilon < f(x) \le A < A + \varepsilon$, tedy $\lim_{x\to b^-} f(x) = A = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

b) Je-li f shora neomezená, pak pro libovolné K $\exists x_0 :\ K < f(x_0)$, tedy $\forall x \in (x_0, b) : K < f(x_0) \le f(x) \Rightarrow \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty = A$.

Podobně pro $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$.

3.3 Limita a spojitost složené funkce

Věta 3.7 *(o limitě složené funkce) Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $a, A \in \mathbb{R}^*$, *a nechť existuje okolí* $U^*_\varepsilon(a)$ *takové, že* $\forall x \in U^*_\varepsilon(a)$ *je* $f(x) \neq A$. *Nechť* $\lim_{y\to A} g(y) = B$, *pak*

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = B.$$

Důkaz Užijeme Heineho větu (3.1). Zvolme posloupnost $x_n \to a, x_n \neq a$, pak dle věty 3.1 $f(x_n) \to A$. Jelikož $f(x_n) \to A$ a $f(x_n) \neq A$ pro $n > n_0$ (pro $x_n \in U_\varepsilon(a)^*$), pak $g(f(x_n)) \to B$ (opět dle věty 3.1). Jelikož pro libovolnou posloupnost $x_n \to a$, $x_n \neq a$, platí, že $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = B$, pak dle Heineho věty (3.1)

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = B.$$

$\square$

Poznámka 3.4

- *Předpoklad* $f(x_n) \neq A$ *je splněn vždy, je-li funkce* f *ryze monotónní. Stejné tvrzení platí i pro jednostranné limity.*
- *Když je fce* g *spojitá, lze předpoklad* $f(x_n) \neq A$ *vynechat.*
- *Je-li funkce* f *spojitá v bodě* a *a funkce* g *spojitá v bodě* $A = f(a)$, *pak je funkce* $g \circ f(x)$ *spojitá v bodě* a.

Příklad 3.6 *Jelikož e^x je spojitá funkce,*

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2-3}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} e^{\frac{x^2-2}{x^2-3}} = e^{\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x-2}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}} \Rightarrow \textit{nemá limitu (pravá limita se nerovná levé).}$$

Příklad 3.7 *Spočtěme* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}$.
Pro $y = \sqrt[12]{1+x}$ *dostaneme*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[6]{1+x}} = \lim_{y\to 1}\frac{y^6-y^4}{y^3-y^2} = \lim_{y\to 1}\frac{y^4(y^2-1)}{y^2(y-1)} = \lim_{y\to 1} y^2(y+1) = 2.$$

Zde je třeba si uvědomit, že používáme větu 3.7, kde $f(x) = \sqrt[12]{1+x}$ *a* $g(y) = \frac{y^6-y^4}{y^3-y^2}$.

Poznámka 3.5 *Je dobré si uvědomit, že věta o limitě složené funkce se dá používat i při počítání limit posloupností. Zde striktně vzato kombinujeme větu o limitě složené funkce a Heineho větu. Ukážeme si to na následujícím příkladu.*

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\ln(n+1)-\ln(n)).$$

Nejdříve určíme limitu $\lim_{x\to\infty}\sin(\ln(x+1)-\ln(x))$. *Začneme s limitou vnitřní funkce, tedy* $\lim_{x\to\infty}(\ln(x+1)-\ln(x)) = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x}$. *Jelikož* $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ *a fuknce* $ln(x)$ *je spojitá v bodě* $a = 1$, *pak dle věty 3.7* $\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{y\to 1}\ln(y) = 0$. *Podobně se spojitosti funkce* $\sin(x)$ *v nule dostaneme* $\lim_{n\to\infty}\sin(\ln(n+1)-\ln(n)) = \lim_{y\to 0}\sin(y) = 0$. *Jelikož* $\lim_{x\to\infty}\sin(\ln(x+1)-\ln(x)) = 0$, *pak z Heineho věty přímo dostaneme* $\lim_{n\to\infty}\sin(\ln(n+1)-\ln(n)) = 0$.

Otázka:
Platí následující tvrzení?

a) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

c) Nechť je funkce f spojitá v bodě a a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

d) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a, pak je funkce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

e) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a a funkce f je spojitá v bodě a, pak je funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

Odpověď:

a) Neplatí. Uvažujem funkci f takovou, že $f(a) = B \neq A$ a posloupnost $x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$.

b) Ano. Je-li $x_n < x_{n+1}$ a zároveň $x_n \to a$, tak $x_n < a$. Tedy pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : x_n \in (a - \delta, a)$. Jelikož $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a) \cap (a, a + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$, tak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

c) Ano. K důkazu tohoto tvrzení stačí aplikovat důsledek **??** a Heineho větu.

d) Neplatí. Je-li například $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $f(a) = B \neq A$, g je spojitá v bodě A a $g(B) = g(A)$, pak je $g \circ f$ spojitá v bodě a.

e) Neplatí. Je-li například f konstantní funkce ($f(x) = A$) a g je definovaná v bodě A, pak $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(A)$. Ale g nemusí být vůbec definovaná na prstencovém okolí bodu A, pokud na něm je definovaná, tak nemusí mít v bodě A limitu a v případě, ze má funkce g v bodě A limitu, tak pořád nemusí platit rovnost $g(A) = \lim_{y\to A} g(y)$.

Definice 3.11 *Funkce f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$, jestliže platí:*

I. f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

II. f je spojitá zprava v bodě a,

III. f je spojitá zleva v bodě b.

Neobsahuje-li interval I krajní body a, resp. b, pak z definice vynecháme body II., resp. III.

Věta 3.8 *Nechť je $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

Důkaz Nechť $f(a) < f(b)$ a nechť $C \in (f(a), f(b))$. Označme $M = \{x \in (a,b) : f(x) < C\}$, pak $M \neq \emptyset$ a je omezená. Označme $x_0 = \sup M$, pak existuje posloupnost $\{x_n\} \in M$, $\{x_n \to x_0\}$, a tedy $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Jelikož $f(x_n) < C$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $f(x_0) \leq C$. Nechť je $f(x_0) < C$, pak existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že $f(x) < f(x_0) + \frac{C - f(x_0)}{2} < C$ pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$ (spojitost v bodě x_0 a volba $\varepsilon = \frac{c - f(x_0)}{2}$). Tedy $U_\delta(x_0) \in M$, což je ve sporu, neboť $x_0 = \sup M$. Tedy $f(x_0) = C$. Obdobně pro $f(b) < f(a)$. (Případ $f(a) = f(b)$ je triviální.)

□

Otázka:
Je následující tvrzení pravdivé? Polynom $f(x) = x^{100} - 9x^2 + 1$ má v intervalu $[0, 2]$ alespoň jeden kořen.
Otázka je převzata ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html

Odpověď: Tvrzení je pravdivé. Stačí si uvědomit, že polynom je spojitá funkce, $f(0) = 1$ a $f(1) = -7$. Tedy dle předchozí věty musí existovat $x_1 \in (0,1)$ a $x_2 \in (1,2)$ takové, že $f(x_1) = f(x_2) = 0$ a .

3.4 Limita a spojitost inverzní funkce

Věta 3.9 *Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu I s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom f zobrazuje interval I na interval J s koncovými body $A = \inf_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, $B = \sup_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$. Tyto koncové body patří do intervalu J právě tehdy, když patří do intervalu I příslušné koncové body a, b.*

Důkaz

- Je-li $I = [a, b]$, pak $\forall x \in (a, b]$: $f(x) > f(a) = A$ a $\forall x \in [a, b)$: $f(x) < f(b) = B$. Tedy $\min_{x \in [a,b]} f(x) = A = \inf_{x \in I} f(x)$ a $\max_{x \in [a,b]} f(x) = B = \sup_{x \in I} f(x)$. Zbytek dostaneme použitím vět 3.8 a 3.6.

- Je-li $I = (a, b)$, pak $\inf_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ a $\sup_{x \in I} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$ z věty 3.6. Označme $A = \inf_{x \in I} f(x)$ a $B = \sup_{x \in I} f(x)$. Nechť $C \in (A, B)$, pak existuje $x_1, x_2 \in (a, b)$ takové, že $f(x_1) < C < f(x_2)$ (z definice suprema a infima). Tedy existuje $x_C \in [x_1, x_2]$ splňující $f(x_C) = C$ dle věty 3.8, a proto $C \in J$. Pokud by $A \in J$, pak by existoval bod $x_A \in (a, b)$ takový, že $f(x_A) = A$. Pak by ale platilo, že $\forall x \in (a, x_A) : f(a) < A$ a tedy by A nebylo infimem funkce f na intervalu I. Proto $A \notin J$. Podobně ukážeme, že $B \notin J$.

- Stejným způsobem se dokáže tvrzení pro $I = (a, b]$ a $I = [a, b)$.

$\square$

Poznámka 3.6 *Obdobné tvrzení platí pro klesající funkce.*

Věta 3.10 *Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu $I = (a, b)$, pak:*

i) *f^{-1} je spojitá a rostoucí na intervalu $f(I)$.*

ii) $\lim_{y \to A^+} f^{-1}(y) = a$, *kde* $A = \inf_{x \in I} f(x)$.

Důkaz

i)
- (f^{-1} je rostoucí): (Sporem) Nechť existují $y_1, y_2 \in f(I),\ y_1 < y_2$, pro něž platí $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Pak $f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq y_2 = f(f^{-1}(y_2))$, což je ve sporu s předpokladem, tedy f^{-1} je rostoucí.
- (f^{-1} je spojitá): Nechť $y_0 \in f(I)$. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
  Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $x_0 + \varepsilon \in I$. Nechť $\delta = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$, pak $f^{-1}(y_0 + \delta) = f^{-1}(f(x_0) + f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)) = f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon$. Jelikož je f^{-1} rostoucí funkce, pak $\forall y \in (y_0, y_0 + \delta)$ platí $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_0) + \varepsilon)$, tedy $\lim_{y \to y_0+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Obdobně dokážeme spojitost zleva a z toho dostaneme spojitost funkce f^{-1}.

ii) Viz i) a věta 3.9 aplikovaná na funkci f^{-1}.

$\square$

3.5 Funkce $\sin x, \cos x$ a e^x, poznámky k výpočtu limit a symbol o

Věta 3.11 *Existuje právě jedna dvojice funkcí* $(\sin x, \cos x)$ *taková, že*

a) *funkce jsou definovány na* $\mathbb{R}$,

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$\sin x$ *je lichá a* $\cos x$ *je sudá.*

c) Existuje číslo $\pi > 0$ *tak, že* $\sin x$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}], \sin\pi/2 = 1, \sin 0 = 0$.

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta 3.12 *Existuje právě jedna funkce* (e^x)*, která má následující vlastnosti:*

a) Je definovaná a je rostoucí na $\mathbb{R}$*,*

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *je* $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$*,* $e^0 = 1$*,*

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Příklad 3.8 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow$ *substituce* $y = e^x - 1$*, pak* $x = \ln(y+1)$*, tedy* $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = 1$.

Příklad 3.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2 - 1}{x^2(\cos x + 1)}\ \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad 3.10

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^3 x - 3\mathrm{tg}x}{\cos(x+\pi/6)} &= \lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^2 x - 3}{\cos(x+\pi/6)}\cdot\mathrm{tg}x = \lim_{x\to\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^2 x - 3}{\cos(x+\pi/6)}\sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\mathrm{tg}x - \sqrt{3})(\mathrm{tg}x + \sqrt{3})}{\cos(x+\pi/6)} = 6\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\mathrm{tg}x - \sqrt{3})}{\cos(x+\pi/6)} \\
&= 6\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x} = 6\lim_{x\to\pi/3}\frac{\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x} \\
&= 6\lim_{x\to\pi/3}\frac{-2}{\cos x} = -24.
\end{aligned}$$

Definice 3.12 *Budeme psát* $f = o(g)$ *v* $a \in \mathbb{R}^*$*, je-li* $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = 0$.

Příklad 3.11

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+3)^5}{(x^5 - x^3 + 7x - 9)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{10} + o(x^{10})}{x^{10} + o(x^{10})} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}(1 + o(x^{10})/x^{10})}{x^{10}(1 + o(x^{10})/x^{10})} = 1.$$

3.6 Derivace funkce

Definice 3.13 *Nechť funkce f je definována na $U(a)$ $(U_+(a), U_-(a))$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a derivaci (derivaci zprava, zleva) rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, je-li*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$

$$\left(\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A, \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A\right).$$

Derivaci funkce f v bodě a značíme $f'(a)$ $(f'_+(a), f'_-(a))$.

Poznámka 3.7 *Derivace $f'(a)$ existuje $\Leftrightarrow \exists f'_+(a), \exists f'_-(a)$ a jsou stejné.*

Poznámka 3.8

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{h=x-a}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Příklad 3.12

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1})}{h} = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Příklad 3.13 $f(x) = e^x$, *pak*

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Příklad 3.14

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x = \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} + \cos x \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos x = \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \cos x \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{(\cos h + 1)} + \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

Otázka:

a) Nechť existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak $\lim_{x\to a} f(x)$

   i) existuje, ale nemáme dost informací na určení hodnoty této limity,

   ii) je rovna $f(a)$,

   iii) je rovna $f'(a)$,

   iv) nemusí existovat.

b) Pokud matka řekne "Když sníš večeři, tak dostaneš zákusek", víme, co to znamená: "Když nesníš večeři, tak zákusek nedostaneš". Pokud učitel analýzy řekne "Má-li funkce f v bodě x vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá", víme, co to znamená:

   i) pokud f není spojitá v x, tak v tomto bodě nemá vlastní derivaci.

   ii) pokud f nemá derivaci v bodě x, tak v tomto bodě není spojitá.

   iii) znalost, že funkce f není spojitá v bodě x nám nedává informaci o tom, zda má v tomto bodě funkce f vlastní derivaci.

c) Vlak jede z Prahy do Ostravy. Nechť $f(t)$ značí ujetou vzdálenost vlaku v čase t (v km). Průvodčí jde ve vlaku ve směru jízdy rychlostí $4km/h$. Jeho rychlost vzhledem ke kolejím je v čase t rovna:

   i) $f(t) + 4$,

   ii) $f(t) - 4$,

   iii) $f(t)' + 4$,

   iv) $f(t)' - 4$.

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) ii) Toto tvrzení bude zformulováno v následující větě.

b) i)

c) iii)

Věta 3.13 *Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x\to a}(x - a)f'(a) = 0.$$

□

Věta 3.14 *Nechť existují vlastní derivace $f'(a), g'(a)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak existuje*

i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

iii) je-li $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Důkaz

i)

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))g(a)}{x - a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a),\end{aligned}$$

jelikož $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ a $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ dle věty 3.13.

iii) Spočtěme nejdříve $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$.

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)}}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dále dle ii)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'(a)\frac{1}{g}(a) + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Věta 3.15 *(o derivaci složené funkce) Nechť funkce f a g mají vlastní derivaci $f'(a), g'(A)$, kde $A = f(a)$. Potom funkce $g\circ f$ má derivaci v bodě a a platí*

$$(g\circ f)'(a) = g'(A)f'(a).$$

Důkaz

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

i) Nechť existuje okolí $U^*(a)$ takové, že $f(x)\neq f(a)\ \forall x\in U^*(a)$. Pak dle věty 3.7

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} = \lim_{y\to A}\frac{g(y)-g(A)}{y-A} = g'(A).$$

ii) Nechť neexistuje okolí $U^*(a)$ takové, že $f(x)\neq f(a)\ \forall x\in U^*(a)$. Pak existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n\to a, x_n\neq a$ taková, že $f(x_n) = f(a)$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = 0.$$

Jelikož existuje vlastní limita $f'(a)$, pak dle věty 3.1 platí $f'(a) = 0$. Chceme tedy dokázat, že

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = 0.$$

Jelikož existuje vlastní $g'(A)$, pak existuje $K\in\mathbb{R}$ takové, že $\left|\frac{g(y)-g(A)}{y-A}\right| < K$ pro všechna $y\in U^*(A)$. Pro $\varepsilon>0$ existuje $U^*(a)$ takové, že $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| < \frac{\varepsilon}{K}$

na $U^*(a)$. Nechť $f(x) \in U^*(A), \forall x \in U^*(a)$ (takové okolí lze najít, jelikož f je spojitá, viz věta 3.13). Pak pro $x \in U^*(a)$ takové, že $f(x) \neq f(a)$, platí

$$\left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \right| = \left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

čímž je důkaz hotov.

□

Věta 3.16 *(o derivaci inverzní funkce) Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu (a, b), $x_0 \in (a, b)$ a $f'(x_0) \neq 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$, pak existuje $(f^{-1})'(y_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

□

Příklad 3.15 *$y = f(x) = x^2$, pak $f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$. $f'(x) = 2x \Rightarrow$*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Příklad 3.16 *$y = f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln y = x$, pak*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Tabulka derivací:

$(x^n)'$	$nx^{n-1}, \quad x > 0$
$(e^x)'$	$e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}, \quad x > 0$
$(\sin x)'$	$\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)'$	$-\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tg} x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\mathrm{cotg} x)'$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\mathrm{arcsin} x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\mathrm{arccos} x)'$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\mathrm{arctg} x)'$	$\frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{arccotg}(x))'$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Příklad 3.17

$$(\mathrm{arctg}(y))' = \frac{1}{(\mathrm{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x.$$

$$y^2 = \mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2} \Rightarrow (\mathrm{arctg}(y))' = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Příklad 3.18 *Spočtěte*

$$\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)\right)'.$$

$$\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)\right)' = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}.$$

Povšimněme si, že zatímco výraz $\frac{-2x}{(1+x^2)\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$ *je definován na celém reálném oboru kromě nuly, původní funkce není definována nikde, proto ani její derivace není definována nikde.*

Otázka:

a) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+h) - \cos 2x}{h}$ se rovná

i) $-\sin x$,

ii) $-\sin 2x$,

iii) $(\cos(2x))'$,

iv) 0,

v) neexistuje, jelikož jde o výraz $\frac{0}{0}$.

b) Nechť f a g mají obě derivaci a $h = f \circ g$, pak $h'(2)$ se rovná

i) $f'(2) \circ g'(2)$,

ii) $f'(2)g'(2)$,

iii) $f'(g(2))g'(2)$,

iv) $f'(g(x))g'(2)$.

c) Platí rovnost $(\ln(2))' = \frac{1}{2}$?

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) ii)

b) iii)

c) Ne, jelikož ln(2) je konstanta a derivace konstanty je nula.

3.7 Vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

Vlastnosti dělíme na lokální a globální. Např. funkce $\sin x$ je rostoucí v bodě $x = 0$, ne však ve všech bodech, tudíž je to lokální vlastnost. Oproti tomu funkce e^x je rostoucí na celém definičním oboru, což je globální vlastnost.

3.7.1 Lokální vlastnosti

Definice 3.14 *Řekneme, že*

- *funkce f je neklesající v bodě a, jestliže existuje okolí $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_-(a) : f(x) \leq f(a)$ a $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) \geq f(a)$,*
- *funkce f je rostoucí v bodě a, jestliže existuje okolí $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_-(a) : f(x) < f(a)$ a $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) > f(a)$,*

- *funkce f má v bodě a lokální maximum, když existuje $U(a)$ takové, že $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in U(a)$,*
- *funkce f má v bodě a ostré lokální maximum, když existuje $U^*(a)$ takové, že $f(x) < f(a)\ \forall x \in U^*(a)$.*

Obdobně zadefinujeme pojmy nerostoucí a klesající v bodě a, lokální minimum a ostré lokální minimum. Má-li funkce f v bodě a lokální maximum nebo lokální minimum, tak říkáme, že má v bodě a lokální extrém.

Věta 3.17 *Je-li funkce f spojitá v bodě a, pak existuje $U(a)$ takové, že funkce f je omezená na $U(a)$.*

Důkaz

Pro $\varepsilon = 1$ existuje $U^*(a)$ tak, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in U^*(a)$, pak $f(a) - 1 \leq f(x) \leq f(a) + 1\ \forall x \in U(a)$.

□

Poznámka 3.9 *Neplatí, že z lokální vlastnosti v každém bodě definičního oboru dané funkce plyne globální vlastnost této funkce. Např. x^2 není omezená, ale v nějakém okolí každého bodu ano.*

Věta 3.18 *Je-li funkce spojitá v bodě a, $f(a) > 0$, pak existuje $U(a)$ pak, že $f(x) > f(a)/2\ \forall x \in U(a)$.*

Důkaz

Viz předchozí důkaz (volba $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$).

□

Věta 3.19 *Nechť $f'(a)$ existuje, pak*

i) je-li $f'(a) > 0$, je f rostoucí v bodě a,

ii) má-li f lokální extrém v bodě a, je $f'(a) = 0$,

iii) je-li f neklesající v bodě a, je $f'(a) \geq 0$.

Důkaz

i) Je-li $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, pak existuje $U^*(a)$ tak, že $\forall x \in U^*(a)$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, tedy pro $x > a$ platí $f(x) > f(a)$ a pro $x < a$ je $f(x) < f(a)$.

ii) Nechť f má v bodě a lokální extrém a nechť $f'(a) > 0$, pak je f rostoucí na nějakém okolí $U(a)$ dle i), což je spor (nemůže mít lokální maximum). Obdobně pro $f'(a) < 0$.

iii) Nechť $f'(a) < 0$, pak je f klesající dle i)$\Rightarrow$ spor.

$\square$

Otázka: Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť je funkce f rostoucí v bodě a, pak $f'(a) > 0$.

b) Nechť má funkce f v bodě a lokální extrém, pak je $f'(a) = 0$.

c) Nechť $f'(a) = 0$, pak má funkce f v bodě a lokální extrém.

d) Nechť je funkce f neklesající v bodě a a $f'(a)$ existuje, pak $f'(a) \geq 0$.

e) Nechť $f'(a) \geq 0$, pak je funkce f neklesající v bodě a.

Odpověď:

a) Neplatí. Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí v bodě $a = 0$, ale $f'(0) = 0(f'(x) = 3x^2)$.

b) Neplatí. Funkce $f(x) = |x|$ má v bodě $a = 0$ lokální minimum, ale derivace této funkce v bodě a neexistuje.

c) Neplatí. Stejný protipříklad jako v bodě a).

d) Platí. Důkaz sporem. Nechť je $f'(a) < 0$, pak dle předchozí věty je fuknce f v bodě a klesající, tím jsme došli ke sporu.

e) Neplatí. Funkce $f(x) = -x^3$ je klesající v bodě $a = 0$, ale $f'(0) = 0$.

3.7.2 Globální vlastnosti

K důkazu věty 3.21 budeme potřebovat následující větu, kterou si zde pouze uvedeme a důkaz provedeme až na konci semestru.

Věta 3.20 (Bolzano-Weierstrassova) *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost.*

Věta 3.21 *Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak je na něm omezená.*

Důkaz

Nechť funkce není omezená na intervalu $[a,b]$, pak pro všechna n existuje $x_n \in [a,b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Dle Bolzano-Weierstrassovy věty 3.20 existuje $x_0 \in [a,b]$ a vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $x_{k_n} \to x_0$. Dle Heineho věty 3.1 pak posloupnost $\{f(x_{k_n})\}$ konverguje k $f(x_0)$, ale $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \infty$, jelikož $f(x_{k_n}) > n$. To je ve sporu se spojitostí funkce f v bodě x_0.

□

Poznámka 3.10 *Nabývá-li funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima v bodě x_0, pak má v tomto bodě lokální maximum nebo je x_0 krajním bodem tohoto intervalu.*

Věta 3.22 *Nechť je f spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak na něm nabývá svého maxima i minima.*

Důkaz

Dle věty 3.21 je funkce omezená, tedy má supremum $G = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Z definice suprema existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : G - f(x_n) < \frac{1}{n}$, z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ (dle věty 3.20) a dle Heineho věty 3.1 dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$, ale také $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = G$. Tedy $f(x_0) = G$ a f nabývá svého maxima v bodě x_0.

□

Poznámka 3.11 *Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. Pokud je I uzavřený interval, pak je i $f(I)$ uzavřený. Plyne to z Věty 3.8 o nabývaní všech mezihodnot, jelikož interval má vlastnost, že je-li $x, y \in I, x < y \Rightarrow [x,y] \subset I$.*

Kapitola 4

Nekonečné číselné řady

Definice 4.1 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *nazveme* n*-tý částečný součet řady a* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost částečných součtů.*

Existuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a má součet* S*.*

Neexistuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Divergentní řady dále dělíme na tři případy:*

- *Je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $+\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*,*

- *je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $-\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$*,*

- *jestliže* $lim_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje, řekneme, že řada osciluje.*

Příklad 4.1 *(geometrická řada)*
Určete, kdy konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$*, kde* $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *a zjistěte její součet.*

Řešení:

1. *Nechť* $q = 1$*, pak* $s_n = an$ *a tedy* $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ *pro* $a > 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ *pro* $a < 0$*. Řada je tedy divergentní a diverguje k* $+\infty(-\infty)$ *pro* $a > 0 (a < 0)$*.*

2. *Nechť $q=-1$, pak $s_n=0$ pro n sudé a $s_n=a$ pro n liché, tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Řada osciluje (diverguje).*

3. *Nechť $|q|\neq 1$.*

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} \\ s_n q &= aq + aq^2 + ... + aq^n \\ s_n - s_n q = s_n(1-q) &= a - aq^n = a(1-q^n) \\ s_n &= a\frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

   - *Pro $|q|<1$ je*
   $$\lim_{n\to\infty} = s_n \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$
   řada konverguje a má součet $\frac{a}{1-q}$.
   - *Pro $q>1$ je*
   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \pm\infty,$$
   řada diverguje k $\pm\infty$.
   - *Pro $q<-1$ limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řada tedy osciluje (diverguje).*

Příklad 4.2 *(teleskopiská řada)*
Určete, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ tedy konverguje, navíc jsme rovněž určili její součet, který je 1.

Věta 4.1 *(nutná podmínka konvergence) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz

Nechť $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jelikož $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ a $\forall n > n_0 : (s_n \in (S-\frac{\varepsilon}{2}, S+\frac{\varepsilon}{2}) \wedge s_{n+1} \in (S - \frac{\varepsilon}{2}, S + \frac{\varepsilon}{2}))$, pak $\forall n > n_0 : |a_{n+1}| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Poznámka 4.1 *Obrácená implikace neplatí (viz následující příklad).*

Příklad 4.3 *Vyšetřete konvergenci harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Řešení:*

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{i} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^n} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \geq \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq ... \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Posloupnost částečných součtů této řady je rostoucí, jelikož $a_n = \frac{1}{n} > 0$, tedy limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje. Jelikož je $s_{2^n} \geq \frac{n+1}{2} \to \infty$, je tato limita $+\infty$. Tedy harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Věta 4.2 *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \gamma b_n)$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \gamma b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz

Důsledek věty o aritmetice limit.

□

Definice 4.2 *Řada se nazývá omezená, je-li posloupnost $\{s_n\}$ omezená.*

Věta 4.3 *Konvergentní řada je omezená.*

Důkaz

Viz věta 2.3, má-li posloupnost vlastní limitu, pak je omezená.

□

Poznámka 4.2 *Obrácené tvrzení neplatí. Např. řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ je divergentní (osciluje), ale je omezená.*

Věta 4.4 *Nechť $p \in \mathbb{N}$, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují.*

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=p+1}^{n} a_i$, pak $s_n = \sum_{i=1}^{p} a_i + \hat{s}_n$ a jelikož $\sum_{i=1}^{p} a_i \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \pm \infty$.

$\square$

Poznámka 4.3 *Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci, řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.*

Otázka:

a) Jsou-li konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je konvergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$?

b) Jsou-li divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je divergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$?

c) Je-li konvergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$, jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

d) Je-li divergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$, jsou divergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Odpověď:

a) Ano. Označme $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : (|\sum_{k=1}^{n} a_k - A| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |\sum_{k=1}^{n} b_k - B| < \frac{\varepsilon}{2})$. Tedy $\forall n > n_0 : |a_1 + b_1 + a_2 + ... + a_n + b_n - (A+B)| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_k - A| + |\sum_{k=1}^{n} b_k - B| < \varepsilon$ (podobně pro součet lichého počtu členů).

b) Ne. Například řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ jsou divergentní, ale řada $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ...$ konverguje k nule.

c) Ne. Viz příklad v části b).

d) Ne. Jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ může být konvergentní.

4.1 Řady s nezápornými členy

Definice 4.3 *Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.*

Věta 4.5 *Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.*

- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neomezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Důkaz

Přímý důsledek věty 2.2 "neklesající posloupnost $\{s_n\}$ má limitu, která je vlastní (rovna $\sup\{s_n\}$), je-li tato posloupnost omezená a je rovna $+\infty$, je-li posloupnost $\{s_n\}$ neomezená".

□

4.1.1 Kritéria konvergence

Věta 4.6 *(srovnávací kritérium) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:*

- *Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_i$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- *Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, pak $s_n \leq \hat{s}_n$. Jelikož jsou posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{\hat{s}_n\}$ neklesající, pak mají limitu. Navíc platí $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n$, viz věta 2.6.

□

Poznámka 4.4 *Předpoklad $a_n \leq b_n$ nemusí platit pro všechna n, ale stačí, aby platil $\forall n > n_0$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Příklad 4.4 *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Řešení: Jelikož $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ pro všechna $n \geq 2$, a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (viz věta 4.4), pak se stačí zaměřit na konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje (viz příklad 4.2), a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 4.7 *(limitní srovnávací kritérium) Nechť* $a_n \geq 0$ *a* $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Jestliže* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$*, pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.*

Důkaz

Označme $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0,\infty)$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{A}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A$, $\forall n > n_0$. Tedy $\frac{A}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq 2A \cdot b_n$ $\forall n > n_0$ a dál jen využijeme věty 4.6 a 4.2.

$\square$

Příklad 4.5 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n}$.

Řešení:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+3n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 3 \in (0,\infty)$*. Jelikož harmonická řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje (viz příklad 4.3), pak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0,\infty)$*. Jelikož řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje (viz příklad 4.4), pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}} = \pi \in (0,\infty)$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{\pi}{n}$ *diverguje.*

Věta 4.8 *(Odmocninové kritérium - Cauchyho) Nechť* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

a) i) *Jestliže existuje* $q < 1$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

   ii) *Je-li* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho členů posloupnosti* $\{a_n\}$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

b) *Existuje-li limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$*, pak:*

   i) *Je-li* $q < 1$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

   ii) *Je-li* $q > 1$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz

a) i) Je-li $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak $a_n \leq q^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jelikož geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (viz příklad 4.1), pak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 4.6.

ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, pak $\lim_{n\to} a_n \neq 0$ a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (viz věta 4.1).

b) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

i) Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby platilo $q+\varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dále postupujeme stejně jako v části a) i).

ii) Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 1$ $\forall n > n_0$. Dále viz a) ii).

□

Příklad 4.6 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

proto řada konverguje.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$
$$\overset{L'H}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-1/n^2}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}} = e^{\frac{-2}{\pi}} < 1,$$

tedy řada konverguje.
Poznámka: Předchozí limitu jsme řešili pomocí l'Hospitalova pravidla, které bude uvedeno až později. Ukážeme si tedy i postup, jak tuto limitu určit bez použití tohoto pravidla. Určeme si nejdříve limitu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}-1}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}-1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0+}\frac{\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}(y)-1\right)}{y}\\ &\overset{y=\cos z}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}(\cos z)-1}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{2}{\pi}z-1}{\cos z}\\ &\overset{u=z-\frac{\pi}{2}}{=} \lim_{u\to 0-}\frac{\frac{2}{\pi}(u+\frac{\pi}{2})-1}{\cos(u+\frac{\pi}{2})} = \lim_{u\to 0-}\frac{\frac{2}{\pi}u}{\cos u\cos\frac{\pi}{2}-\sin u\sin\frac{\pi}{2}}\\ &= \lim_{u\to 0-}\frac{\frac{2}{\pi}u}{-\sin u} = -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Nyní stačí využít spojitost funkce e^x a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arccos}\frac{1}{n}\right)} = \lim_{v\to-\frac{2}{\pi}} e^v = e^{\frac{-2}{\pi}}.$$

Věta 4.9 *(Podílové kritérium - d'Alembertovo) Nechť $a_n \geq 0$.*

i) Existuje-li $q < 1$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

ii) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak:

- *je-li $q < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
- *je-li $q > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz

i) Jelikož $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, pak $a_{n+1} \leq a_n q$, tedy indukcí dokážeme, že $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ je konvergentní geometrická řada ($|q| < 1$), pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje dle věty 4.6. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak $a_{n+1} \geq a_1$, a jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ diverguje[1], pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[1] $a_1 > 0$, jelikož výraz $\frac{a_2}{a_1}$ má smysl z předpokladu věty, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

ii) – Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon < 1$ pro všechna $n > n_0$. Označme $\hat{q} = q+\varepsilon$ a postupujme dále jako v první části důkazu, tedy dostaneme $a_{n+1} \leq a_n\hat{q}$ pro všechna $n > n_0$, a proto $a_{n_0+k} \leq a_{n_0}\hat{q}^k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Jelikož je $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}\hat{q}^n$ konvergentní geometrická řada, pak je i $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergentní dle věty 4.6, a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 4.4.

– Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pro všechna $n > n_0$, tedy $a_{n_0+k} > a_{n_0} \ \forall n > n_0$. Dále postupujeme jako v předchozích částech důkazu.

□

Příklad 4.7 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-7)2^n}{n!}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n-5)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2n-7)2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-5)2}{(2n-7)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-10}{2n^2-7n} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

tedy řada diverguje.
V tomto příkladu by šlo také lehce ukázat, že není splněna nutná podmínka konvergence.

Poznámka 4.5 *V situaci, kdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, kritérium "mlčí". Tato situace může nastat jak pro konvergentní řadu (viz příklad 4.4), tak pro divergentní řadu (viz příklad 4.3). Je dobré si uvědomit, že podílové kritérium nám obecně nedá informaci o konvergenci či divergenci řady $\sum \frac{1}{n^k}$, přitom lze ukázat, že tato řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$. Proto byla vynalezena další silnější kritéria jako třeba Raabeovo či integrální kritérium. Uvedeme si zde Raabeovo kritérium (i když bez důkazu, který na nás čeká až v třetím semestru) a ukážeme si jeho aplikaci na řadu $\sum \frac{1}{n^k}$.*

Věta 4.10 *(Raabeovo kritérium) Nechť $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

i) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 4.8 *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n^k}$ pro $k \in (1, 2)$. Připomeňme, že pro $k = 1$ řada diverguje, a tedy diverguje i pro $k < 1$ dle věty 4.6. Obdobně dostaneme konvergenci pro $k > 2$ užitím stejné věty a znalosti konvergence řady $\sum \frac{1}{n^2}$.*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{(n+1)^k}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^k - n^k}{n^k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{e^{k\ln(n+1)} - e^{k\ln n}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{e^{k\ln n}(e^{k\ln(n+1)-k\ln n} - 1)}{n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{n^k \cdot (e^{k\ln(n+1)-k\ln n} - 1)(k\ln(n+1) - k\ln n)}{n^k \cdot (k\ln(n+1) - k\ln n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot 1 \cdot \frac{(k\ln(n+1) - k\ln n)}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{k\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = k \cdot 1 = k.
\end{aligned}$$

Tedy řada $\sum \frac{1}{n^k}$ konverguje pro $k > 1$ dle Raabeova kritéria.

Otázka:

a) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n \geq a_{n+1}$.

b) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

c) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

d) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.

   ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.

iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.

iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

e) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.

ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.

iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.

iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

f) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

g) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak konverguje i řada $\sum(-1)^n a_n$.

Odpověď:

a) Tvrzení neplatí. Například pro posloupnost $a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}$ a $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^3}$ řada $\sum a_n$ konverguje ($a_n \leq \frac{1}{n^2}$), ale $a_{2n-1} < a_{2n}$.

b) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

c) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

d) Platí tvrzení ii) a iii). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n < b_n$. Dále stačí aplikovat větu 4.6.

e) Platí tvrzení i) a iv). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n > b_n$. Dále stačí aplikovat větu 4.6.

f) Tvrzení platí. Tomuto kritériu se říká kondenzační kritérium. Důkaz je podobný jako u konvergence harmonické řady (př. 4.3). Stačí si uvědomit, že $2a_2 \geq 2a_3 \geq a_3 + a_4 \geq 2a_4$, $4a_4 \geq 4a_5 \geq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8, \ldots$.

g) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek věty 4.11.

4.2 Řady s obecnými členy

Definice 4.4 *Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*. Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, ale řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverguje, říkáme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně.*

Věta 4.11 *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergentní, pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Důkaz

Použijme značení $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = K \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Posloupnosti částečných součtů $s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+$ a $s_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$ jsou monotónní a omezené ($s_n^+ \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq K$ a $s_n^- \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq K$), tedy dle věty 3.6 konvergují. Z konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ a věty 4.2 dostaneme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Poznámka 4.6 *Předchozí věta lze vyjádřit také takto: Absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Příklad 4.9 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Řešení:

a) Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|$ *konverguje (příklad 4.4), pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *(dle věty 4.11), a tedy řada konverguje absolutně.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *je harmonická řada, o které víme, že je divergentní. Musíme tedy zkoumat konvergenci přímo řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{1}{(n-1)n} < \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i(i+1)}. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *je konvergentní (viz příklad 4.4), a tedy je limita* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i(i+1)}$ *konečná, a proto je konečná i limita* $\lim_{n\to\infty}s_{2n}$. *Označme* $\lim_{n\to\infty}s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{n\to\infty}s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}s_{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = A$, *a tedy je* $\lim_{n\to\infty}s_n = A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *je konvergentní, tj. řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje relativně.*

Věta 4.12 *(Leibnizovo kritérium) Nechť pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí:*

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *konverguje.*

Důkaz
$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, tedy je posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající. Jelikož

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned}$$

je navíc posloupnopst $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, a tedy konvergentní. Označme $\lim_{n\to\infty}s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty}s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}s_{2n} + \lim_{n\to\infty}a_{2n+1} = A,$$

tedy je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.

□

Příklad 4.10 *a) Vraťme se k řadě* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Využijeme-li Leibnizovo kritérium, pak I.*$\frac{1}{n} > 0$, *II.*$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ *a III.* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, *tedy řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje.*

b) Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$. *Řadu sice lze napsat ve tvaru* $\sum(-1)^n a_n$, *kde* $a_n > 0$, *ale neplatí obecně nerovnost* $a_n \geq a_{n+1}$, *a tedy nelze aplikovat Leibnizovo kritérium. Budeme tedy postupovat podobně jako v příkladu 4.9 b).*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \dots$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= -\frac{1}{\sqrt{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2n}-1} \\ &= \frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{1}+1}{(\sqrt{1}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{-\sqrt{4}+1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{4}-1)} + \dots \frac{-\sqrt{2n}+1+\sqrt{2n-1}+1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2+\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k-1}+1)(\sqrt{2k}-1)}. \end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}) = 0$, *pak* $\forall n > n_0$ *platí nerovnost* $\frac{1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)} < \frac{2+\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)}$. *Řadu* $\sum \frac{1}{(\sqrt{2n-1}+1)(\sqrt{2n}-1)}$ *srovnáme (použijeme limitní srovnávací kritérium) s harmonickou řadou. Tedy* $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \infty$. *Jelikož* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *pak* $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \infty$, *proto řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ *diverguje.*

4.2.1 Přerovnávání řad

Definice 4.5 *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada a* $\{k_n\}$ *je permutace množiny* $\mathbb{N}$ *(*$\{k_n\}$ *je posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou). Pak říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *vznikla přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uvedeme si dvě věty o přerovnávání řad bez důkazů.

Věta 4.13 *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, *která vznikla přerovnáním této řady, a jejich součet je stejný (tj.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$*).*

V následujícím lemmatu použijme stejné značení jako v důkazu věty 4.11, tj. $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$.

Lemma 4.14 *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně, pak obě řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *divergují k* $+\infty$.

Věta 4.15 *(Riemannova) Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně a nechť* $s \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje takové přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$, *a takové přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ *řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ *osciluje.*

Poznámka 4.7 *Riemanova věta nám například říká, že když si zvolíme libovolné reálné číslo* $S \in \mathbb{R}$, *pak existuje přerovnání řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *takové, že součet takto přerovnané řady je* S. *Rovněž ale můžeme řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *přerovnat tak, aby součet tohoto přerovnání byl* ∞. *Důkaz Riemannovy věty nám dává dokonce i návod, jak takové přerovnání provést.*

Kapitola 5

Funkce podruhé

5.0.1 Věty o střední hodnotě

Věta 5.1 *(Rolleova věta) Nechť platí:*

i) *fukce f je spojitá na $[a, b]$,*

ii) *funkce f má derivaci na (a, b),*

iii) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f'(x_0) = 0$.

Důkaz

f je spojitá na $[a, b]$, pak nabývá svého maxima a minima dle věty 3.22.

1) Nechť $\min f = \max f$, pak je funkce f konstantní na $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0$ na (a, b).

2) Nechť $\min f < \max f$, pak alespoň jeden z těchto extrémů je uvnitř intervalu (a, b). Označme tento bod x_0, pak dle věty 3.19 platí $f'(x_0) = 0$.

□

Věta 5.2 *(Cauchyova věta) Nechť f a g jsou funkce, pro které platí*

i) *f a g jsou spojité na $[a, b]$,*

ii) *existují $f'(x)$ a $g'(x)$ na otevřeném intervalu (a, b),*

iii) *$g'(x)$ je vlastní a nenulová na (a, b).*

Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Důkaz

Nechť $g(a) = g(b)$, pak dle věty 5.1 existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $g'(x_0) = 0$, což je ve sporu s předpokladem nenulovosti g', tedy $g(a) \neq g(b)$. Označme $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ a zvolme

$$F(x) = f(x) - g(x)K = f(x) - g(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

i) $F(x)$ je spojitá na $[a,b]$, jelikož $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na $[a,b]$.

ii) $F(x)$ má derivaci na (a,b), jelikož $f(x)$ a $g(x)$ mají derivaci na (a,b) (viz věta 3.14).

iii)

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - g(a)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + g(a)f(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}, \\ F(b) &= f(b) - g(b)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + g(b)f(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}. \end{aligned}$$

Tedy $F(a) = F(b)$.

Pak dle Rolleovy věty 5.1 existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)K \Rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$\square$

Důsledek 5.3 *(Lagrangeova věta) Buď f spojitá funkce na $[a,b]$ a nechť existuje $f'(x)$ na (a,b). Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a).$$

Důkaz

Stačí zvolit $g(x) = x$ a užít větu 5.2.

□

Příklad 5.1 *Jelikož* $|(\sin x)'| \leq 1$, *pak dle Lagrangeovy věty* $\frac{|\sin b - \sin a|}{|b-a|} = |(\sin x_0)'| \leq 1$, *tedy* $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$.

Důsledek 5.4 *Nechť* f *je spojitá na intervalu* $[a,b]$ *a* $f'(x) = 0$ *na* (a,b), *pak* f *je konstantní na* $[a,b]$.

Důkaz

Nechť existují $x_1, x_2 \in [a,b]$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$. BÚNO $x_1 < x_2$, pak existuje $x_0 \in (x_1, x_2)$ tak, že $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0 \Rightarrow$ SPOR.

□

Otázka:

a) Uvažujme funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 2]$. Existuje bod $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 2)$ splňující $f'(x_0) = \frac{f(2)-f(-\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})}$?

b) Běžec běhá tam a zpět podél rovné cesty. Svůj běh skončil ve stejném místě, kde jej začal. Musel zde existovat aspoň jeden čas, kdy se musel zastavit (jeho rychlost byla nulová)?

c) Dva běžci, kteří společně odstartovali (proběhli společně startem) v závodě také proběhli společně cílem. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

   i) V nějakém čase v závodě některý z nich vedl.

   ii) Rychlost běžců na konci závodu musela být stejná.

   iii) V nějakém čase v závodě museli mít oba běžci stejnou rychlost.

   iv) Musí existovat rychlost, kterou oba běžci během závodu v nějakém čase poběží, ale každý touto rychlostí může bežet v jiném čase.

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) Neplatí. Funkce $f(x) = |x|$ nemá všude na intervalu $(-\frac{1}{2}, 2)$ derivaci, tedy nelze aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě. $\frac{f(2)-f(\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{5}$, ale $f'(x) = 1$ pro $x > 0$ a $f'(x) = -1$ pro $x < 0$, derivace funkce f v bodě 0 neexistuje.

b) Platí. Stačí vhodně aplikovar Rolleovu větu o střední hodnotě.

c)
  i) Tvrzení neplatí. Oba běžci mohou celý závod běžet společně.
  ii) Tvrzení neplatí.
  iii) Platí. Stačí aplikovat Cauchyho větu o střední hodnotě. Např. Bude-li $f(t)$ resp. $g(t)$ vzdálenost, kterou už během závodu uběhl první resp. druhý běžec, $a = 0$ a b bude čas, kdy oba běžci proběhli společně cílem.
  iv) Tvrzení je přímým důsledkem tvrzení iii).

Důsledek 5.5 *Nechť f je zprava spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má na $U_+(a)$ vlastní derivaci, pro kterou platí*

$$\lim_{x \to a+} f'(x) = A.$$

Pak existuje $f'_+(a)$ a je rovna A.

Důkaz Nechť $x \in U_+(a)$, pak dle Věty 5.3 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi(x))$, kde $x_0 \in (a, x) \subset U_+(a)$. Jelikož $\lim_{x \to a+} x_0(x) = a$, pak

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} f'(x_0(x)) = A.$$

□

5.1 Průběh funkce

Zavedeme značení: Je-li J interval, je J^o jeho vnitřek (tj. inteval J bez krajních bodů).

Věta 5.6 *Mějme interval J a nechť existuje f' na J^o, pak platí:*

1) *Nechť $f' > 0$ ($f' < 0$) na J^o, pak je f rostoucí (klesající) na J.*

2) *Funkce f je neklesající (nerostoucí) na $J \Leftrightarrow f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) na J^o.*

Důkaz

1) Lagrangeova věta (5.3): Nechť $x_2 > x_1 \in J$, pak existuje $x_0 \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f(x_0)'(x_2 - x_1) > 0$.

2) ($\Rightarrow$) Nechť existuje $x_0 \in J^o$ takové, že $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f klesající v bodě x_0 dle věty 3.19. Tedy existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro $x \in U_-(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$ a funkce f tedy není neklesající na celém J.

($\Leftarrow$) Nechť $x_2 > x_1 \in J$, pak existuje $x_0 \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f(x_0)'(x_2 - x_1) \geq 0$, tedy $f(x_2) \geq f(x_1)$.

□

Otázka: Platí následující tvrzení? Funkce f je rostoucí na J^o $\Leftrightarrow$ f je rostoucí v každém bodě J^o.

Odpověď: Ano

Důkaz

Pro připomenutí:

- Funkce f je rostoucí na $J^o \Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in J^o : (y_1 < y_2) \Rightarrow (f(y_1) < f(y_2))$.
- Funkce f je rostoucí v bodě a, jestliže existuje okolí $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_-(a) : f(x) < f(a)$ a $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) > f(a)$.

($\Rightarrow$) Stačí zvolit $U^*(a)$ takové, aby $U^*(a) \subset J^o$.

($\Leftarrow$) Nechť existují $y_1, y_2 \in J^o$ takové, že $y_1 < y_2$ a $f(y_1) > f(y_2)$. Označme množinu $M = \{x \in [y_1, y_2] : f(x) > f(y_2)\}$, pak $M \neq \emptyset$ ($y_1 \in M$) a M je omezená (tedy existuje suprémum). Označme $a = \sup M$. Je-li $a \in M$, pak $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) \leq f(y_2) < f(a)$, tedy funkce f není rostoucí v bodě a. Pokud $a \notin M$, pak pro každé $U^*_-(a)$ existuje $x \in U^*_-(a)$ takové, že $x \in M$, tedy $f(x) > f(y_2) \geq f(a)$, proto není funkce f rostoucí v bodě a.

Podobně dojdeme ke sporu i pro případ $y_1 < y_2$ a $f(y_1) = f(y_2)$. Je-li funkce $f(x)$ konstantní na $[y_1, y_2]$, pak není rostoucí v žádném bodě intervalu (y_1, y_2). Pokud funkce f není konstantní, pak existuje $x_0 \in (y_1, y_2)$ takový, že $f(x_0) \neq f(y_1) = f(y_1)$. Pro $f(x_0) > f(y_1) = f(y_2)$ označíme $\tilde{y_1} = x_0$ a $\tilde{y_2} = y_2$, pro $f(x_0) < f(y_1) = f(y_2)$ označíme $\tilde{y_1} = y_1$ a $\tilde{y_2} = x_0$. Dále postupujeme s body $\tilde{y_1}, \tilde{y_2}$ jako v předešlé části.

□

Věta 5.7 *(o lokálních extrémech)*

i) Buď f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Je-li f rostoucí (klesající) na $U^*_-(a)$ a klesající (rostoucí) na $U^*_+(a)$, pak má v bodě a ostré lokální maximum (minimum).

ii) *Nechť je* f *spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$, $f' > 0$ *(*$f' < 0$*) na* $U^*_-(a)$ *a* $f' < 0$ *(*$f' > 0$*) na* $U^*_+(a)$, *pak* f *má v bodě* a *ostré lokální maximum (minimum).*

iii) *Nechť existuje* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *tak, že* $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ *a* $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Potom*

  a) *Je-li* n *sudé,* $f^{(n)}(a) > 0$ *(*$f^{(n)}(a)) < 0$*), má* f *v bodě* a *ostré lokální minimum (maximum).*

  b) *Je-li* n *liché, nemá* f *v bodě* a *lokální extrém. Pro* $f^{(n)}(a) > 0$ *(*$f^{(n)}(a) < 0$*) je* f *v* a *rostoucí (klesající).*

Důkaz

i) f je rostoucí na $U^*_-(a)$, tedy $\lim_{x\to a-} f(x) = \sup_{x\in U^*_-(a)} f(x) = f(a)$ dle věty 3.9 a ze spojitosti f. Jelikož $x < \frac{x+a}{2} < a$ pro všechna $x \in U^*_-(a)$, pak $f(x) < f(\frac{x+a}{2}) \leq f(a)$ (f je rostoucí na $U^*_-(a)$). Obdobně dostaneme, že $f(a) > f(x)$ pro $x \in U^*_+(a)$.

ii) Nechť $f' > 0$ na $U^*_-(a)$ a nechť existují $x, y \in U^*_-(a)$ tak, že $x < y$ a $f(x) \geq f(y)$, pak $f'(x_0) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$ pro nějaké $x_0 \in (x, y)$ dle věty 5.3 $\Rightarrow$ SPOR, tedy f je rostoucí na $U^*_-(a)$. Dále viz i).

iii) Dokážeme indukcí. Nechť $n = 2$ a $f^{(2)}(a) > 0$, pak f' je rostoucí v a (viz věta 3.19), tedy $f'(x) < f'(a) = 0$ pro $x \in U^*_-(a)$ a $f'(x) > f'(a) = 0$ pro $x \in U^*_+(a)$. Tedy dle ii) má f v a ostré lokální minimum.

  Nechť platí věta pro n, $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$ a $f^{(n+1)}(a) > 0$.

  – Je-li n sudé, pak f' má v a ostré lokální minimum, tedy $f'(x) > f'(a) = 0$ na $U^*(a)$. Tedy f je rostoucí, jelikož $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a)$ dle věty 5.3 ($x_0 \in (x, a)$ pro $x \in U^*_-(a)$ a $x_0 \in (a, x)$ pro $x \in U^*_+(a)$).
  – Je-li n liché, pak f' je v a rostoucí. Jelikož $f'(a) = 0$, pak $f' < 0$ na $U^*_-(a)$ a $f' > 0$ na $U^*_+(a)$. Tedy f má v a ostré lokální minimum dle ii).

□

Definice 5.1 *Nechť existuje vlastní* $f'(a)$. *Říkáme, že* f *má inflexní bod v bodě* a, *jestliže existuje* $U^*(a)$ *takové, že pro* $x \in U^*_-(a)$ *je* $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ *a pro* $x \in U^*_+(a)$ *je* $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$, *nebo platí obrácené nerovnosti.*

Věta 5.8 *Je-li* a *inflexní bod funkce* f *a existuje* $f''(a)$, *pak* $f''(a) = 0$.

Důkaz

Je-li $f''(a) > 0$, pak je f' rostoucí v a (věta 3.19), tedy existuje $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*(a) : f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a) > f'(a)(x-a)$ (věta 5.3), proto f nemá v a inflexní bod. Podobně pro $f''(a) < 0$.

□

Věta 5.9 *Je-li $f''(a) = 0$ a f'' mění znaménko v bodě a, je a inflexní bod.*

Důkaz

Nechť $f''(x) > 0$ na levém okolí a a $f''(x) < 0$ na pravém okolí a. Pak má f' v a ostré lokální maximum (dle věty **??**), tedy $f'(x) < f'(a)$ na $U^*(a)$. Pak dle věty 5.3 $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a) < f'(a)(x-a)$ na $U^*_-(a)$ a $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a) > f'(a)(x-a)$ na $U^*_+(a)$.

□

Definice 5.2 *Funkce se nazývá konvexní na intervalu J, jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in J$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Je-li nerovnost ostrá, říkáme že f je ryze konvexní na J. Podobně zadefinujeme (ryze) konkávní funkci na intervalu J.

Věta 5.10 *Nechť f je spojitá na intervalu J a $f''(x) > 0$ na J. Potom je f na J ryze konvexní.*

Důkaz

Jelikož $f'' > 0$ na J, pak je f' rostoucí na J. Nechť $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in J$, tedy dle věty 5.3 je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} = f'(x_0^1)$ a $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{(x_3-x_2)} = f'(x_0^2)$, kde $x_1 < x_0^1 < x_2 < x_0^2 < x_3$, pak

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$
$$f(x_2)x_3 - f(x_2)x_2 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_2 < f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_2)x_2 + f(x_2)x_1$$
$$f(x_2)x_3 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_2 < f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 + f(x_2)x_1$$

a

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$
$$f(x_2)x_3 - f(x_2)x_1 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_1 < f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_1)x_2 + f(x_1)x_1$$
$$f(x_2)x_3 - f(x_2)x_1 - f(x_1)x_3 < f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_1)x_2$$
$$f(x_2)x_3 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_2 < f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 + f(x_2)x_1.$$

Tedy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

čímž je důkaz hotov.

□

Otázka: Platí následující tvrzení?

a) Funkce f je konvexní na intervalu J právě tehdy, když $\forall x, y \in J, \forall \lambda \in (0,1)$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

b) Funkce f je ryze konvexní na otevřeném intervalu J právě tehdy, když $\forall a, x \in J, x \neq a : f(a) + f'(a)(x-a) < f(x)$.

Odpověď:

a) Ano. f je konvexní na intervalu J, jestliže $\forall x, y, z \in J, x < z < y$, platí $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Vyjádřeme z a λ následujícím způsobem: $z = \lambda x + (1-\lambda y)$, tedy $\lambda = \frac{y-z}{y-x}$. Uvědomme si, že každému $z \in (x,y)$ odpovídá právě jedno $\lambda \in (0,1)$ a naopak. Nerovnost $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ lze přepsat do tvaru $f(z) \leq \frac{(f(y)-f(x))(z-x)}{y-x} + f(x)$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \frac{(f(y)-f(x))(z-x)}{y-x} + f(x) = f(x)\left(1 - \frac{z-x}{y-x}\right) + f(y)\cdot\frac{z-x}{y-x} \\ &= f(x)\cdot\frac{y-x-z+x}{y-x} + f(y)\cdot\frac{z-y+y-x}{y-x} = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

b) Ne. Nerovnost $\forall a, x \in J, x \neq a : f(a) + f'(a)(x-a) < f(x)$ vyžaduje existenci derivace na J, ale konvexní funkce nemusí mít derivaci na celém J.

5.1.1 Asymptoty

Definice 5.3 *Nechť f je definována na (a,b), $b \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to b_-} f(x) = \pm\infty$. Potom říkáme, že funkce f má v bodě b vertikální asymptotu (analogicky pro bod a).*

Definice 5.4 *Nechť f je definována na (a,∞). Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \infty$, je-li*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Analogicky pro $x \to -\infty$ a f definované na $(-\infty, b)$.

Věta 5.11 *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \pm\infty \Leftrightarrow$*

a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$,

b) $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}$.

Důkaz

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (kx + q)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = q$. Je-li $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = q \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-kx}{x} = 0$, tedy $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

□

Otázka:

a) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D_f = \mathbb{R})$?

b) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D_f = \mathbb{R})$?

c) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít lineární funkce f?

d) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít polynom druhého stupně?

e) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít polynom n-tého stupně pro $n > 2$?

Odpověď:

a) Nekonečně mnoho. Stačí si třeba vzít fuknci $f(x) = \tan x$ a dodefinovat ji v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nulou. Pak bude $D_f = \mathbb{R}$ a ve všech bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ má funkce f vertikální asymptotu.

b) Dvě. Spojitá funkce na $\mathbb{R}$ nemůže mít žádné vertikální asymptoty (pro každé $b \in \mathbb{R}$ platí: $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b) \neq \pm\infty$. Dvě různé asymptoty v nekonečnech mít může. Např. $f(x) = |x|$ má asymptoty $y = x$ a $y = -x$.

c) Jedna. Lineární funkce je sama svojí asymptotou.

d) Nula. Funce $f(x) = a + bx + cx^2$ (kde $c \neq 0$) je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy nemůže mít vertikální asymptoty. $\lim_{x\to\infty}(a + bx + cx^2 - (kx + q)) = \lim_{x\to\infty} x^2(c + \frac{b-k}{x} + \frac{a-q}{x^2}) = \pm\infty$ (výraz $c + \frac{b-k}{x} + \frac{a-q}{x^2}$ má limitu c).

e) Nula. Stejný postup jako v bodě d).

Kapitola 6

Dodatky

6.1 Posloupnosti podruhé

Věta 6.1 *Z každé neomezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má nevlastní limitu.*

Důkaz

Nechť $\{a_n\}$ není omezená shora. Ukážeme, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel k_n takových, že $a_{k_n} > n$. Jelikož $\{a_n\}$ není omezená shora, pak existuje $a_{k_1} > 1$. Nechť $k_1 < k_2 < ... < k_n$ taková, že $a_{k_i} > i$ $\forall i = 1, ..., n$, pak existuje $k_{n+1} > k_n$ takové, že $a_{k_{n+1}} > n + 1$. Skutečně, nechť takové k_{n+1} neexistuje, pak je ale posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora např. číslem $\max\{a_1, a_2, ..., a_{k_n}, n+1\}$, což je ve sporu s předpokladem neomezenosti, proto lze takové k_{n+1} najít. Jelikož $a_{k_n} > n$ $\forall n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$ z důkazu věty 2.5. Obdobně pro $\{a_n\}$ omezenou zdola.

$\square$

Věta 6.2 (Bolzano-Weierstrassova) *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost.*

Důkaz

Existují $A, B \in \mathbb{R}$ takové, že $A < a_n < B$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (z omezenosti posl $\{a_n\}$). Označme $A_1 = A$, $B_1 = B$ a $k_1 = 1$. Jelikož v intervalu $[A_1, B_1]$ leží nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{a_n\}$, pak alespoň v jednom z intervalů $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}], [\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ musí ležet nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{a_n\}$. Označme tento interval $[A_2, B_2]$ a nechť $k_2 = \min\{n > k_1 : a_n \in [A_2, B_2]\}$ (existence minima plyne z toho, že v $[A_2, B_2]$ je nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$). Obdobně označíme $[A_3, B_3]$ ten z intervalů $[A_2, \frac{A_2+B_2}{2}], [\frac{A_2+B_2}{2}, B_2]$, ve kterém leží nekonečně prvků posloupnosti (v případě, že v obou intervalech leží nekonečně prvků posloupnosti, pak si můžeme vybrat, jaký z těchto intervalů označíme $[A_3, B_3]$). Označíme $k_3 = \min\{n > k_2 : a_n \in [A_3, B_3]\}$ a pokračujeme stále stejným způsobem dále.

Takto sestrojíme posloupnost intervalů $\{[A_n, B_n]\}$ a vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}$, pro něž platí:

- $[A_{n+1}, B_{n+1}] \subset [A_n, B_n], \ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^{n-1}}$,
- $a_{k_n} \in [A_n, B_n]$.

Jelikož $\{A_n\}$ a $\{B_n\}$ jsou monotónní a omezené posloupnosti, pak jsou konvergentní (věta 2.2). A jelikož $\lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{B-A}{2^{n-1}} = 0$, tedy $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n$, pak dle věty 2.5 je

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

□

Definice 6.1 *Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (BC podmínku), jestliže $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Věta 6.3 (Bolzanova-Cauchyova) *Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku.*

Důkaz

- Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n > n_0$. Tedy $|a_n - a_m| = |a_n - A - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon$ pro všechna $m, n > n_0$.
- Nechť $\{a_n\}$ splňuje BC podmínku.
  1) Ukažme si, že $\{a_n\}$ je omezená. Pro $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < 1 \ \forall n, m > n_0$, tedy $a_{n_0+1} - 1 < a_m < a_{n_0+1} + 1 \ \forall m \geq n_0$. Pak tedy $a_n \leq \max\{a_1, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$ a $a_n \geq \min\{a_1, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
  2) Jelikož je $\{a_n\}$ omezená, pak dle věty 3.20 existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$, označme $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$.
  3) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $|a_{k_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > n_0^1$ ($\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$) a $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n, m > n_0^2$ (BC podmínka). Zvolme $m > n_0^1$ takové, že $k_m > n_0^2$, pak $|a_n - A| = |a_n - a_{k_m} + a_{k_m} - A| \leq |a_n - a_{k_m}| + |a_{k_m} - A| < \varepsilon$ pro $n > n_0^2$.

□

6.2 l'Hospitalovo pravidlo

Věta 6.4 (l'Hospitalovo pravidlo) *Nechť pro* $a \in \mathbb{R}^*$ *mají funkce* f *a* g *vlastní derivace na nějakém* $U^*(a)$, $g'(x) \neq 0$ *na* $U^*(a)$ *a nechť je splněna jedna z následujících podmínek:*

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $g(x) \neq 0$ *na* $U^*(a)$,

b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Je-li navíc $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *pak* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Důkaz

a) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Nechť jsou splněny předpoklady s pravou limitou a pravým okolím. Definujme $\hat{f} = f, \hat{g} = g$ na $U^*(a)^+$ a $\hat{f}(a) = \hat{g}(a) = 0$. Nechť $x \in U^*(a)^+$, pak $\hat{f}, \hat{g}$ splňují předpoklady věty 5.2 na $[a, x]$ (jsou spojité na $[a, x]$, mají derivace na (a, x) a $\hat{g}'$ je vlastní a nenulová na (a, x)). Tedy existuje $\xi(x) \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(a)} = \frac{\hat{f}'(\xi(x))}{\hat{g}'(\xi(x))} = \frac{f'}{g'}(\xi(x)).$$

Jelikož $\lim_{x\to a+} \xi(x) = a$, pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'}{g'}(\xi(x)) = A.$$

Stejně i pro $U^*(a)^-$ a $U^*(a)$.

Nechť $a = \infty$, pak označme $y = \frac{1}{x}$ a definujme $F(y) = f(\frac{1}{y})$ a $G(y) = g(\frac{1}{y})$. Pak F a G splňují předpoklad a) pro $a = 0$, jelikož $F'(y) = f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})$ a

$$\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)},$$

je důkaz hotov.

□

Příklad 6.1 *Pomocí l'Hospitalova pravidla se dá ukázat platnost základních limit:*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1,$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

Příklad 6.2 *Pomocí l'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat i složitější limity:*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6},$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}.$