

Domácí úlohy 2.
odevzdat do 21.10. 15:40

1. (5 bodů) Buď $T \leq S$ tělesa. Buď $F \subseteq T[x_1, \dots, x_n]$ a $A \subseteq S^n$. Označme

$$V(F) = \{(a_1, \dots, a_n) \in S^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pro všechna } f \in F\},$$

$$I(A) = \{f \in T[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pro všechna } (a_1, \dots, a_n) \in A\}.$$

Jinými slovy, $V(F)$ je množina všech řešení soustavy polynomiálních rovnic dané polynomy z F . Je snadné nahlédnout, že $I(A)$ je vždy ideál. Zadání:

- a) Buď $F_1, F_2 \subseteq T[x_1, \dots, x_n]$ takové, že $(F_1) = (F_2)$ (tj. generují stejný ideál). Dokažte, že tyto množiny určují ekvivalentní soustavy polynomiálních rovnic, tj. že $V(F_1) = V(F_2)$. Použijte Hilbertovu větu o bázi k závěru, že ke každé soustavě rovnic existuje ekvivalentní konečná soustava rovnic.
- b) Dokažte, že pokud $|A| = 1$, pak $I(A)$ je prvoideál.
- c) Uveďte příklad, kdy $|A| = 2$ a přesto $I(A)$ prvoideálem je.

2. (5 bodů) Dokažte, že

- a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1) \simeq \{(a, b) : a \equiv b \pmod{2}\} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3. (5 bodů) Zjistěte, kolik různých okruhů (až na izomorfismus) lze získat jako $\mathbb{R}[x]/(f)$, kde $f \in \mathbb{R}[x]$ stupně 3. Návod: dokažte, že $\mathbb{R}[x]/((x - u)^k) \simeq \mathbb{R}[x]/((x - v)^k)$ pro všechna $u, v \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Doplňující cvičení

4. Dokažte, že

- (1) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.
- (2) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.
- (3) $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

5. S jakými známými okruhy jsou izomorfní $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 3)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$ a $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3)$?

6. S jakými známými okruhy jsou izomorfní $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4)$, $\mathbb{R}[x]/(x^4 - 4)$ a $\mathbb{C}[x]/(x^4 - 4)$?

7. S jakým známým okruhem je izomorfní $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$?

8. Zjistěte, které okruhy (až na izomorfismus) lze získat jako $R[x]/f$ volbou různých polynomů $f \in R[x]$ stupně 2. Zde R značí těleso a) $\mathbb{C}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\mathbb{Q}$.

9. Zjistěte, kolik různých okruhů až na izomorfismus lze získat jako $\mathbb{C}[x]/f$ volbou různých polynomů $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně 3.

10. Dokažte, že $R[x, y]/(y) \simeq R[x]$ a $R[x, y]/(x - y) \simeq R[x]$.

11. Buď X spočetná množina a $x \in X$. Dokažte, že $R[X]/(x) \simeq R[X]$.

12. Rozhodněte, zda jsou faktorokruhy a) $\mathbb{Z}[i]/(2)$, b) $\mathbb{Z}[x]/(x)$, oborem integrity, případně tělesem.

13. S kterým známým okruhem je izomorfní $\mathbb{Z}[i]/(2)$?

14. Dokažte, že $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ je obor integrity.