Domácí úlohy 7.

odevzdat do 28.11. 14:00 (čtvrtek)

Na přednášce jsme dokázali, že ve volném modulu nad oborem integrity jsou všechny volné báze stejně velké. Důkaz byl založen na přechodu k vektorovému prostoru nad podílovým tělesem (proto fungoval jen pro obory integrity), kde se použilo analogické tvrzení pro vektorové prostry známé z lineární algebry. Např. pro $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}^n$ jsme přecházeli k vektorovému prostoru $\mathbb{Q}^n$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

V rámci domácích cvičení předvedu důkaz analogického tvrzení pro *všechny komutativní okruhy.* Důkaz bude založen na přechodu k jistému faktormodulu nad faktorokruhem podle maximálního ideálu (což je vektorový prostor nad tělesem). Např. pro $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}^n$ přejdeme k vektorovému prostoru $\mathbb{Z}_p^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. Mějte tento příklad na paměti!

(Pro nekomutativní okruhy tato věta neplatí, příklad viz nějaká přednáška o nekomutativních okruzích a modulech.)

Důkaz. Buď $E = \{e_i : i \in I\}$ nějaká volná báze volného R-modulu F. Buď M maximální ideál v R.

1. (5 bodů) Dokažte, že $MF = \{\sum m_i u_i : m_i \in M, u_i \in F\}$ je podmodul modulu F, a dokažte, že F/MF je R/M-modulem (tj. vektorovým prostorem na tělesem R/M). Skalární násobení se rozumí

$$[r]_M \cdot [x]_{MF} = [rx]_{MF}.$$

(Nezapomeňte ověřit, že jsou operace dobře definované!)

Uvažujme $E' = \{[e_i]_{MF} : i \in I\}$. Platí $|E| = |E'|$: kdyby $[e_i]_{MF} = [e_j]_{MF}$, pak $e_i - e_j \in MF$, tedy v F platí $e_i - e_j = \sum_k m_k u_k \cdot \sum_l r_l e_l = \sum_{k,l}(m_k u_k r_l)e_l$, čili jeden prvek máme vyjádřený dvěma různými způsoby v téže volné bázi E (různými, protože vlevo jsou koeficienty ± 1 a vpravo jsou všechny koeficienty z M, tedy $\neq \pm 1$), spor.

Pokud dokážeme, že E' je bází vektorového prostoru F/MF nad R/M, jsme hotovi – každé dvě báze vektorového prostoru mají stejnou velikost.

2. (5 bodů) Dokažte, že E' generuje vektorový prostor F/MF nad R/M.

3. (5 bodů) Dokažte, že E' je lineárně nezávislá ve vektorovém prostoru F/MF nad R/M. Návod: Napište si $[0]_{MF} = \sum [r_i]_M [e_i]_{MF} = [\sum r_i e_i]_{MF}$ a použijte stejný trik, jako v důkaze $|E| = |E'|$ uvedeném výše. $\square$