Oprava k důkazu věty o rozkladu p-komponenty na direktní sumu cyklických.

Z indukčního předpokladu $M/Soc(M) \simeq \bigoplus [u_i]R$. Označme n_i výšku $[u_i]$ v $M/Soc(M)$. Na přednášce jsem dokázal, že výška u_i v M je n_i+1. Označme $N = \sum u_iR$. Chci dokázat, že $N = \bigoplus u_iR$.

Podle jistého kritéria stačí dokázat, že pokud $\sum r_iu_i = 0$, pak $r_iu_i = 0$ pro všechna i.

Napišme $r_i = p^{k_i}s_i$, kde $s_i \in R$ takové, že $p \nmid s_i$ [to je ten krok, který jsem zapomněl udělat]. Vidíme, že $\sum r_i[u_i] = [0]$ v $M/Soc(M)$, tedy, protože to je direktní suma, máme pro všechna i rovnost $r_i[u_i] = [0]$, tedy $r_iu_i = p^{k_i}s_iu_i \in Soc(M)$, tedy $p^{k_i+1}s_iu_i = 0$, a tedy výška prvku s_iu_i je nejvýše $k_i + 1$. Podle lemmatu je výška prvku u_i stejná. Výše jsme spočetli, že to je $n_i + 1$, takže dostáváme $k_i \geq n_i \geq 1$.

Vztah $k_i \geq 1$ využijeme k vytknutí p ze sumy. Máme tedy $0 = \sum r_iu_i = p \cdot \sum p^{k_i-1}s_iu_i$, tedy $\sum p^{k_i-1}s_iu_i \in Soc(M)$, tedy $\sum p^{k_i-1}s_i[u_i] = [0]$ v $M/Soc(M)$, tedy, protože to je direktní suma, pro všechna i platí $p^{k_i-1}s_i[u_i] = [0]$, tedy $p^{k_i-1}s_iu_i \in Soc(M)$, tedy $0 = p^{k_i}s_iu_i = r_iu_i$, což jsme chtěli dokázat.

Zbytek důkazu jako na přednášce.