AXIOM VÝBĚRU

DAVID STANOVSKÝ A ONDŘEJ VEJPUSTEK

Cílem textu je vysvětlit, jak používat axiom výběru a jeho ekvivalentní formy, především Zornovo lemma. Text je zpracován volně podle učebnice [1]. Pro hlubší seznámení s problematikou axiomatizace matematiky doporučujeme také knihy [2] (populárně) a [3] (odborně).

[1] B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 1986, 2005.
[2] A. Doxiadis, C. Papadimitriou, *Logicomix*, Bloomsbury, 2009.
[3] P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity*, Springer, 2013.

1. Několik existenčních podmínek

Nejprve připomeneme terminologii, kterou budeme používat.

Uspořádáním rozumíme relaci $\preceq$ na množině X, která je symetrická, tranzitivní a antisymetrická. Uspořádání nazýváme *lineární*, pokud jsou každé dva prvky porovnatelné. Uspořádání nazýváme *dobré*, pokud má každá neprázdná podmnožina množiny X nejmenší prvek. *Řetězcem* rozumíme jakoukoliv podmnožinu $Y \subseteq X$ takovou, že uspořádání $\preceq$ omezené na Y je lineární. *Uspořádanou množinou* rozumíme dvojici $(X, \preceq)$, kde $\preceq$ je uspořádání na X.

Buď $\sim$ ekvivalence na množině X, označme $[x]_\sim = \{y \in X : x \sim y\}$ její bloky. *Transverzálou* ekvivalence $\sim$ je množina T taková, že $|T \cap [x]_\sim| = 1$ pro každé $x \in X$.

Buď $R \subseteq X \times Y$ relace. *Definičním oborem* rozumíme množinu $\operatorname{dom} R = \{x \in X :$ existuje $y \in Y$ takové, že $(x, y) \in R\}$. *Oborem hodnot* rozumíme množinu $\operatorname{rng} R = \{y \in Y :$ existuje $x \in X$ takové, že $(x, y) \in R\}$.

Buď I množina indexů a $\mathcal{X} = (X_i : i \in I)$ systém neprázdných množin. Zobrazení $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ se nazývá *selektor* systému $\mathcal{X}$, pokud pro každé $i \in I$ platí $f(i) \in X_i$. Množina všech selektorů se nazývá *kartézský součin* a značí se $\prod_{i\in I} X_i$.

Hlavní věta. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(AC1) *Pro každou ekvivalenci existuje transverzála.*
(AC2) *Pro každou relaci $R \subseteq X \times Y$ existuje funkce $f : \operatorname{dom} R \to Y$ taková, že $(x, f(x)) \in R$ pro každé $x \in \operatorname{dom} R$.*
(AC3) *Kartézský součin neprázdných množin je neprázdný. Jinými slovy, pro každý systém neprázdných množin existuje selektor.*
(MP) *Buď $(X, \preceq)$ neprázdná uspořádaná množina taková, že každý řetězec v $(X, \preceq)$ má horní mez. Potom v $(X, \preceq)$ existuje maximální prvek.*
(WO) *Na každé množině existuje dobré lineární uspořádání.*

Date: 5. listopadu 2013.

Ukázat ekvivalenci prvních tří tvrzení je snadné, souhrnně se jim říká *axiom výběru*. Čtvrté tvrzení se nazývá *princip maximality*, nebo také *Zornovo lemma*. Poslední tvrzení se nazývá *princip dobrého uspořádání*.

Platnost těchto navzájem ekvivalentních tvrzení je nezávislá na standardních Zermelo-Fraenkelových axiomech teorie množin. (Ekvivalence těchto tvrzení v této axiomatizace dokazatelná je.) Problém si ilustrujeme na příkladu existence selektoru. Uvažujme systém neprázdných množin $(X_i : i \in \mathbb{N})$ indexovaný přirozenými čísly. Tedy víme, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje $x_i \in X_i$. Otázkou je, zda existuje zobrazení $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} X_i$, tj. posloupnost $(f(i) : i \in \mathbb{N})$, taková, že $f(i) \in X_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Nemůžeme jenoduše říci, že $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, atd., protože to bychom definovali objekt nekonečným výčtem. Ukazuje se, že je třeba postulovat (axiomem), že objekt s těmito vlastnostmi skutečně existuje.

Je několik dobrých důvodů, proč platnost axiomu výběru (a tedy i ostatních podmínek uvedených v Hlavní větě) předpokládat, za všechny uveďme například:

- každý vektorový prostor má bázi, s dalekosáhlými důsledky ve funkcionální analýze,
- každý ideál v komutativním okruhu lze rozšířit do maximálního ideálu, s dalekosáhlými důsledky v komutativní algebře.

Jsou také některé důvody, proč axiom výběru zavrhnout:

- do matematiky se zavádějí nekonstruktivní důkazy: všechna uvedená tvrzení postulují existenci nějakého objektu, k němuž nemusí být k dispozici explicitní konstrukce,
- axiom výběru má některé důsledky, které se vzpírají běžné intuici, například:
  - existenci neměřitelné množiny, viz Tvrzení 3,
  - *Banach-Tarského paradox*, který říká, že každou kouli v $\mathbb{R}^3$ lze rozdělit na pět disjunktních podmnožin $A_1, \dots, A_5$ takových, že existují shodnosti $\pi_1, \dots, \pi_5$ v $\mathbb{R}^3$ takové, že $\bigcup_{i=1}^{5} \pi_i(A_i)$ je koule o dvojnásobném poloměru.

Přijetí axiomu výběru se postupně ukázalo jako lepší varianta. Naprostá většina současné matematiky předpokládá platnost axiomu výběru, aniž by tento fakt byl explicitně uváděn.

V dalších sekcích si ukážeme, jak se jednotlivé principy používají, a také si Hlavní větu dokážeme.

2. Axiom výběru

Nejprve dokážeme ekvivalenci tří tvrzení nazývaných souhrnně axiom výběru.

Důkaz (AC1) $\Leftrightarrow$ (AC2) $\Leftrightarrow$ (AC3).

(AC1) $\Rightarrow$ (AC2) Buď $R \subseteq X \times Y$ relace. Nadefinujme relaci $\sim$ na R vztahem

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$$

pro všechna $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times R$. Lehce se ověří, že $\sim$ je ekvivalence. Podle (AC1) existuje transverzála f této ekvivalence. Jistě platí $f \subseteq R \subseteq X \times Y$. Navíc ke každému $x \in X$ existuje nejvýše jedno $y \in Y$ takové, že $(x, y) \in f$, tedy f je zobrazením z X do Y. A protože pro každé $x \in \operatorname{dom} R$ obsahuje transverzála alespoň jeden prvek tvaru (x, y), kde y je nějaký prvek z R, tak $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} R$.

(AC2) $\Rightarrow$ (AC3) Buď $(X_i : i \in I)$ systém neprázdných množin. Nadefinujme relaci $R \subseteq I \times \bigcup_{i\in I} X_i$:

$$R = \left\{ (i,x) \in I \times \bigcup_{i\in I} X_i : x \in X_i \right\}.$$

Podle (AC2) existuje zobrazení $f : \operatorname{dom} R \to \bigcup_{i\in I} X_i$ takové, že $(x, f(x)) \in R$. Protože množiny X_i jsou neprázdné, $\operatorname{dom} R = I$. Vidíme, že jde o selektor, tj. prvek kartézského součinu $\prod_{i\in I} X_i$.

(AC3) $\Rightarrow$ (AC1). Mějme ekvivalenci na množině X, označme X_i, $i \in I$, všechny její bloky. Podle (AC3) existuje selektor f systému $(X_i : i \in I)$. Jelikož žádná rozkladová třída X_i není prázdná, $\operatorname{rng} f$ je transverzála této ekvivalence. $\square$

Nyní si ukážeme několik příkladů, jak použít axiom výběru k důkazu nějakého existenčního tvrzení.

Buďte X, Y libovolné množiny. Říkáme, že X má *stejnou nebo menší mohutnost* než Y, značíme $X \preceq Y$, jestliže existuje prosté zobrazení $f : X \to Y$. Řekneme, že množina X je *spočetná*, jestliže $X \preceq \mathbb{N}$. Je snadné dokázat, že $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná množina.

Tvrzení 1. *Sjednocení spočetných množin je spočetná množina.*

Důkaz. Buď I spočetná množina indexů a buďte A_i pro $i \in I$ spočetné množiny. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $I = \mathbb{N}$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ buď F_i množina všech prostých zobrazení z A_i do $\mathbb{N}$. Každá z množin F_i je neprázdná, protože množiny A_i jsou spočetné. Podle (AC3) existuje selektor systému množin $(F_i : i \in \mathbb{N})$, tedy posloupnost funkcí $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Označme $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ a definujme zobrazení $\phi : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisem $\phi(x) = (i, f_i(x))$, kde $i \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové i, pro které $x \in A_i$. Protože každé zobrazení f_i je prosté, je prosté i zobrazení ϕ. Přitom $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná množina, takže A je spočetná také. $\square$

Použití axiomu výběru je zde podstatné: fakt, že lze každé jednotlivé A_i prostě zobrazit do $\mathbb{N}$, ještě neznamená, že existuje zobrazení, které je takto zobrazuje všechny najednou.

V matematické analýze se axiom výběru může objevit ve chvíli, kdy dokazujeme existenci posloupnosti prvků s danými vlastnostmi. Příkladem je Heineho věta.

Tvrzení 2 (Heineho věta)**.** *Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost reálných čísel (a_n) splňující* $\lim a_n = a$ *platí* $\lim f(a_n) = f(a)$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) je standardní argument pomocí $\varepsilon\delta$-kalkulu.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že f není spojitá v bodě a. Chceme dokázat existenci posloupnosti (a_n), která nesplňuje uvedenou podmínku. Z definice spojitosti existuje okolí $\mathcal{V}$ bodu $f(a)$ takové, že v každém okolí $\mathcal{U}\left(a, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, existuje x_n takové, že $f(x_n) \notin \mathcal{V}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$W_n = \left\{ x : |x - a| < \frac{1}{n},\ f(x) \notin \mathcal{V} \right\}$$

Z předchozí úvahy plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je W_n neprázdná. Podle (AC3) existuje selektor systému $(W_n : n \in \mathbb{N})$, tj. posloupnost (a_n) taková, že $a_n \in W_n$. Není těžké ověřit, že $\lim a_n = a$, přitom $\lim f(a_n)$ neexistuje. $\square$

Pomocí axiomu výběru lze dokázat existenci neměřitelné množiny vzhledem k poměrně obecně specifikované třídě měr. Např. Lebesgueova míra splňuje předpoklady následujícího tvrzení.

Tvrzení 3. *Existuje neměřitelná množina vzhledem k jakékoliv spočetně aditivní míře na $\mathbb{R}^2$, která je invariantní vůči rotaci a jednotkový kruh má nenulovou konečnou míru.*

Důkaz. Buď μ taková míra a pro spor předpokládejme, že všechny podmnožiny $\mathbb{R}^2$ jsou měřitelné. Označme S jednotkovou kružnici a B jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$. Uvažujme působení aditivní grupy $\mathbb{Q}$ na množinu S tak, že $\rho(a)$ je rovno bodu a otočenému o úhel $2\rho\pi$ podle středu té kružnice, pro každé $\rho \in \mathbb{Q}$ a $a \in S$. Orbitu tohoto působení obsahující prvek $a \in S$ můžeme vyjádřit jako $\{\rho(a) : \rho \in \mathbb{Q}\}$. Buď T transverzála ekvivalence dané rozkladem na orbity. Vidíme, že

$$S = \bigcup_{t \in T} \{\rho(t) : \rho \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{Q}} \rho(T),$$

přičemž jde o disjunktní rozklad. Označme $\bar{T}$ sjednocení včech úseček spojujících střed jednotkového kruhu a body z T. Dostáváme disjunktní rozklad

$$B = \bigcup_{\rho \in \mathbb{Q}} \rho(\bar{T})$$

a použitím spočetné aditivity

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{\rho \in \mathbb{Q}} \rho(\bar{T})\right) = \sum_{\rho \in \mathbb{Q}} \mu(\rho(\bar{T})) = \sum_{\rho \in \mathbb{Q}} \mu(\bar{T}),$$

kde poslední rovnost plyne z invariance míry vůči rotaci. Je-li $\mu(\bar{T}) = 0$, pak $\mu(B) = 0$, spor. Je-li $\mu(\bar{T}) > 0$, pak $\mu(B) = \infty$, také spor. Čili množina $\bar{T}$ nemůže být měřitelná. $\square$

3. Princip maximality, aneb Zornovo lemma

Nejprve dokážeme ekvivalenci (MP) s axiomem výběru. První část důkazu lze brát jako komplikovanější ukázku důkazové techniky založené na axiomu výběru. Druhá část důkazu ilustruje použití Zornova lemmatu.

Důkaz $(\mathsf{AC1}) \Leftrightarrow (\mathsf{MP})$.

$(\mathsf{AC2}) \Rightarrow (\mathsf{MP})$. Důkaz provedeme pomocí transfinitní rekurze (metoda je vysvětlena v učebnici [1, kap. II]). Předpokládejme, že v uspořádané množině $(X, \preceq)$ má každý řetězec horní mez, ale neexistuje v ní maximální prvek. Uvažujme relaci

$$R = \{(A, a) : A \subseteq X \text{ je řetězec a } a \in X \text{ jeho horní mez v } (X, \preceq)\}.$$

Podle $(\mathsf{AC2})$ existuje zobrazení f, které každému řetězci přiřadí nějakou jeho horní mez. Neexistence maximálního prvku znamená, že ke každému $x \in X$ existuje $y \in X$ takové, že $x \prec y$. Uvažujme relaci $\prec$ na množině X. Vzhledem k tomu, že $\mathrm{dom}(\prec) = X$, podle $(\mathsf{AC2})$ existuje zobrazení $g : X \to X$ takové, že $x \prec g(x)$.

Nyní sestrojíme posloupnost indexovanou ordinálními čísly: $a_0 \in X$ buď libovolné, dále definujme $a_{\alpha+1} = g(a_\alpha)$ a pro α limitní definujme $a_\alpha = f(\{a_\beta : \beta < \alpha\})$. Vidíme, že množina X má alespoň tolik různých prvků, kolik je ordinálů, ale takové množiny neexistují.

(MP) $\Rightarrow$ (AC1) Uvažujme libovolnou ekvivalenci $\sim$ na množině X a definujme množinu částečných transverzál,

$$M = \{T \subseteq X : |T \cap B| \leq 1 \text{ pro každý blok } B \text{ ekvivalence } \sim\}.$$

Tedy množina M obsahuje právě ty množiny, které vybírají po jednom prvku z některých tříd ekvivalence. Množina M je neprázdná, protože $\emptyset \in M$. Uvažujme množinu M uspořádanou inkluzí.

Nejprve dokážeme, že každý řetězec $(T_i : i \in I)$ v $(M, \subseteq)$ má horní mez. Stačí ukázat, že $T = \bigcup_{i \in I} T_i \in M$, a tedy je horní mezí tohoto řetězce. Pro spor předpokládejme, že to neplatí, tedy existuje blok B takový, že $|T \cap B| \geq 2$; označme dva z těchto prvků a, b. Zvolme indexy $i, j \in I$ takové, že $a \in T_i \cap B$ a $b \in T_j \cap B$. Protože šlo o řetězec, platí $T_i \subseteq T_j$, nebo $T_j \subseteq T_i$. V prvním případě máme $a, b \in T_j \cap B$, v druhém případě máme $a, b \in T_i \cap B$, v obou případech dostáváme spor.

Z (MP) plyne, že v $(M, \subseteq)$ existuje maximální prvek T. Ukážeme, že T je transverzálou. Pro spor předpokládejme opak, čili existuje blok B takový, že $T \cap B = \emptyset$. Volbou libovolného $x \in B$ dostaneme $T \subset T \cup \{x\} \in M$, spor s maximalitou T. $\square$

Ve zbytku sekce ukážeme několik příkladů, jak použít Zornovo lemma k důkazu existenčních tvrzení. Pozorujte podobnost těchto důkazů s výše uvedeným důkazem (MP) $\Rightarrow$ (AC1).

Tvrzení 4. *Každý vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Buď V vektorový prostor nad tělesem T a označme M množinu všech lineárně nezávislých podmnožin V. Množina M je neprázdná, $\emptyset \in M$. Uvažujme množinu M uspořádanou inkluzí.

Nejprve dokážeme, že každý řetězec $(A_i : i \in I)$ v $(M, \subseteq)$ má horní mez. Stačí ukázat, že $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in M$, a tedy je horní mezí tohoto řetězce. Pro spor předpokládejme, že to neplatí, tedy existují prvky $t_1, \ldots, t_n \in T$, ne všechny nulové, a vektory $v_1, \ldots, v_n \in A$ takové, že $\sum_{i=1}^n t_i v_i = 0$. Pro každý z vektorů v_j existuje index $i_j \in I$ takový, že $v_j \in A_{i_j}$. Vzhledem k tomu, že $(A_i : i \in I)$ je řetězec, mezi těmito n množinami $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ existuje největší, označme ji A_i, obsahující všech n lineárně závislých vektorů. Spor.

Z (MP) plyne, že v $(M, \subseteq)$ existuje maximální prvek A. Ukážeme, že A je bází. Pro spor předpokládejme opak, čili $\langle A \rangle \neq V$. Volbou libovolného $v \in V \setminus \langle A \rangle$ dostaneme lineárně nezývislou množinu $A \subset A \cup \{v\} \in M$, spor s maximalitou A. $\square$

Tvrzení 5. *V každém komutativním okruhu s jednotkou existuje maximální ideál.*

Důkaz. Buď R okruh a označme M množinu všech vlastních ideálů (tj. ideálů různých od R, tj. ideálů neobsahujících jednotku) uspořádaných inkluzí. Množina M je neprázdná, $0 \in M$. Maximální ideál je, z definice, maximálním prvkem této množiny.

Nejprve dokážeme, že každý řetězec $(A_i : i \in I)$ v $(M, \subseteq)$ má horní mez. Stačí ukázat, že $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in M$, a tedy je horní mezí tohoto řetězce. (Jde o známé tvrzení, že sjednocení řetězce ideálů je ideál.) Buď $a, b \in A$, $r \in R$, chceme dokázat, že $a + b, ra \in A$. Existují indexy $i, j \in I$ takové, že $a \in A_i$ a $b \in A_j$. Protože šlo o řetězec, platí $A_i \subseteq A_j$, nebo $A_j \subseteq A_i$, tedy oba prvky padnou do jednoho z těchto ideálů, z čehož ihned plyne dokazované tvrzení. Zbývá dokázat, že A je vlastní. Kdyby $1 \in A$, pak existuje $i \in I$ takové, že $1 \in A_i$, spor. Nyní stačí použít (MP). $\square$

Připomeňme, že $X \preceq Y$, jestliže existuje prosté zobrazení $f : X \to Y$.

Tvrzení 6. *Pro každou dvojici množin X, Y platí $X \preceq Y$ nebo $Y \preceq X$.*

Důkaz. Označme M množinu všech prostých zobrazení z podmnožiny X do Y, tj.

$$M = \{f : A \to Y : A \subseteq X,\ f \text{ je prostá}\}\,.$$

Množina M je neprázdná, protože prázdné zobrazení patří do M. Uvažujme množinu M uspořádanou inkluzí.

Nejprve dokážeme, že každý řetězec $(f_i : i \in I)$ v $(M, \subseteq)$ má horní mez. Stačí ukázat, že $f = \bigcup_{i \in I} f_i \in M$, a tedy je horní mezí tohoto řetězce. Nejprve dokážeme, že f je zobrazení. Kdyby $(x, y), (x, z) \in f$, pak existují indexy i, j takové, že $f_i(x) = y$ a $f_j(x) = z$, spor s faktem, že f_i, f_j jsou zobrazení a $f_i \subseteq f_j$ nebo naopak. Nyní dokážeme, že f je prosté. Kdyby $(x, z), (y, z) \in f$, pak existují indexy i, j takové, že $f_i(x) = z$ a $f_j(y) = z$, spor s faktem, že f_i, f_j jsou prostá a $f_i \subseteq f_j$ nebo naopak.

Z (MP) plyne, že v $(M, \subseteq)$ existuje maximální prvek f. Ukážeme, že $\operatorname{dom} f = X$ nebo $\operatorname{rng} f = Y$. Pro spor předpokládejme, že ani jedno z tvrzení neplatí. Volbou libovolných $x \in X \setminus \operatorname{dom} f$ a $y \in Y \setminus \operatorname{rng} f$ dostaneme $f \subseteq f \cup (x, y) \in M$, spor s maximalitou f. K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že pokud $\operatorname{dom} f = X$, pak $X \preceq Y$, a pokud $\operatorname{rng} f = Y$, potom f^{-1} je prosté zobrazení $Y \to X$, a tedy $Y \preceq X$. $\square$

Dalším důležitým příkladem použití Zornova lemmatu je důkaz existence a jednoznačnosti algebraického uzávěru, viz libovolná dostatečně obsažná učebnice obecné algebry.

4. Princip dobrého uspořádání

O tomto principu nebudeme mluvit podrobně, nicméně ukážeme si jeho ekvivalenci s ostatními podmínkami. První část důkazu lze brát jako další ukázku důkazové techniky založené na Zornově lemmatu. Druhá část důkazu ilustruje, jak je možné dělat konstruktivní důkazy existence za předpokladu, že máme dáno dobré lineární uspořádání.

Dokončení důkazu Hlavní věty.

(MP) $\Rightarrow$ (WO). Buď X množina. Označme M množinu všech dobrých lineárních uspořádání na podmnožinách X, tj.

$$M = \{\preceq :\ \text{relace } \preceq \text{ je dobré lineární uspořádání na množině } A \subseteq X\}\,.$$

Množina M je neprázdná, $\emptyset$ je dobré lineární uspořádání na množině $\emptyset \subseteq X$. Uvažujme množinu M uspořádanou inkluzí. Podobně jako v předchozích důkazech se ověří, že sjednocením řetězce dobrých lineárních uspořádání je dobré lineární uspořádní. Podle (MP) existuje v $(M, \subseteq)$ maximální prvek. Kdyby tento nebyl uspořádáním na celé množině X, bylo by možné jej rozšířit o jednu dvojici, spor s maximalitou. (Detaily nechť si čtenář doplní sám.)

(WO) $\Rightarrow$ (AC3). Buď $\mathcal{X} = (X_i : i \in I)$ systém neprázdných množin, označme $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Díky (WO) můžeme uvažovat dobré lineární uspořádání $\preceq$ na množině X. Buď f relace definovaná

$$f = \{(i, x) \in I \times X : x \in X_i \text{ a pro každé } y \in X_i \text{ platí } x \preceq y\}\,,$$

tj. relace f vybírá pro každé $i \in I$ mezi všemi prvky X_i ten, který je nejmenší vzhledem k uspořádání $\preceq$. Díky dobrosti je f zobrazení definované na celém X, a tedy je selektorem systému $\mathcal{X}$. $\square$

5. Cvičení

1. Dokažte za pomoci axiomu výběru, že každé zobrazení $f : A \to B$, které je *na* B, má pravý inverz, tj. že existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $fg(x) = x$ pro všechna $x \in B$.

2. Bod $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *akumulační* pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $a \in A$ takové, že $|a - x| < \varepsilon$.

(a) Dokažte za pomoci axiomu výběru, že ke každému akumulačnímu bodu x pro A existuje posloupnost (a_n) prvků množiny A taková, že $\lim a_n = x$.
(b) Dokažte toto tvrzení pro množinu $A = \mathbb{Q}$ *bez pomoci axiomu výběru.*

3. Dokažte za pomoci Zornova lemmatu, že každé částečné uspořádání na dané množině lze rozšířit do lineárního uspořádání. (Rozšířením uspořádání $\leq$ se rozumí uspořádání $\preccurlyeq$ na téže množině takové, že pokud $x \leq y$, pak $x \preccurlyeq y$.)

4. Buď $\mathbf{B}$ Booleova algebra. Podmnožinu $F \subset B$ nazýváme *filtrem*, pokud pro každé $x, y \in F$ platí $x \wedge y \in F$, a pokud pro každé $x \in F$ a $y \geq x$ platí $y \in F$. Filtr F se nazývá *ultrafiltrem*, pokud pro každý prvek $a \in B$ platí $a \in F$ nebo $a' \in F$. Dokažte za pomoci Zornova lemmatu, že každý filtr lze rozšířit do ultrafiltru.

5. Doplňte detaily v důkazu $(\mathsf{MP}) \Rightarrow (\mathsf{WO})$.