Domácí úlohy 3.

odevzdat do 8.12. 14:00

V logice jsou dva pojmy "podobnosti"struktur. Jedním je *izomorfismus*, viz minule (neformálně, jednu strukturu z dostaneme z druhé přejmenováním prvků). Druhým je *elementární ekvivalence*: dvě struktury jsou elementární ekvivalentní, pokud v nich platí stejné sentence, tj. pro každou sentenci σ platí $\mathcal{A} \models \sigma$ právě tehdy, když $\mathcal{B} \models \sigma$ (neformálně, pokud mají stejné vlastnosti).

Jedno z tvrzení v minulém domácím úkolu říkalo, že izomorfní struktury jsou elementárně ekvivalentní. Opačná implikace obecně neplatí: různé velké struktury nemohou být izomorfní, avšak mohou být elementárně ekvivalentní (příkladem jsou třeba různé modely dané úplné teorie).

1. (6 bodů) Dokažte, že dvě elementárně ekvivalentní *konečné* struktury jsou nutně izomorfní. Návod: dokažte, že pro každou konečnou strukturu $\mathcal{A}$ existuje sentence σ taková, že $\mathcal{B} \models \sigma$ právě tehdy, když $\mathcal{A}$ je izomorfní $\mathcal{B}$.

Z věty o kompaktnosti plyne, že každá sentence platná ve všech tělesech charakteristiky 0 platí také ve všech tělesech dostatečně velké nenulové charakteristiky (viz přednáška). Avšak pozor, v předpoklady se nelze omezit na jediné konkrétní těleso:

2. (6 bodů) Najděte sentenci v jazyce $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$, která je platná v tělese komplexních čísel, ale neplatí v žádném tělese nenulové charakteristiky. (Návod: odmocniny.)

Na závěr si procvičte konstrukci modelu z věty o úplnosti.

3. (8 bodů) Níže je uvedeno několik příkladů jazyka L a množiny formulí Σ v jazyce L. Uvažujte strukturu $\mathcal{A}_\Sigma$ z důkazu věty o úplnosti. Kdy platí $\mathcal{A}_\Sigma \models \Sigma$?

(a) $L = \{\leq, c\}$,
$\Sigma = \{$axiomy uspořádání, $(\forall x)(\forall y)(\exists z) x \leq z \leq y\}$.

(b) $L = \{\leq, c, d\}$,
$\Sigma = \{$axiomy uspořádání, $(\forall x)(\forall y)(\exists z) x \leq z \leq y\}$.

(c) $L = \{\leq, c, d, f\}$,
$\Sigma = \{$axiomy uspořádání, $(\forall x)(\forall y) x \leq f(x, y) \leq y\}$.

(d) $L = \{g, c\}$,
$\Sigma = \{(g(x) = g(y)) \to (x = y),\ (\forall x)(\exists y) g(y) = x\}$.

(e) $L = \{g, h, c\}$,
$\Sigma = \{g(h(x)) = x,\ h(g(x)) = x.\}$.

Domácí úlohy BONUS.

odevzdat spolu s 3. sérií 8.12.

Přečtěte si Logicomix. (Pokud se vám to nechce číst celé, tak si přečtěte aspoň těch pár stěžejních částí, kde se děje nějaká matematika.)

4. (1 bod) Kolik koláčků snědl Russell Fregemu? Při čí přednášce myslel Poincaré na párky? Kdo seděl vedle Russella na Gödelově přednášce?

5. (2 body) Proč nešel Russell studovat reálnou analýzu? Tato otázka si zasluhuje zamyšlení a odpověď aspoň jednou košatou větou.

Body budou přičteny k celkovému skóre z domácích úloh.