Domácí úlohy 4.

odevzdat do 5.1. 14:00

Všechna cvičení jsou založena na *větě o kompaktnosti*, která říká, že množina formulí Σ má model právě tehdy, když má každá její konečná podmnožina $\Sigma' \subseteq \Sigma$ model.

Většina cvičení se bude týkat axiomatizovatelnosti dané třídy struktur. Formálně, třída $\mathbf{K}$ struktur v jazyce L je *axiomatizovatelná*, pokud existuje množina Σ formulí v jazyce L taková, že $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ právě tehdy, když $\mathcal{A} \models \Sigma$. Třída je *konečně axiomatizovatelná*, pokud lze najít takovou Σ konečnou. Uvědomte si, že je-li třída konečně axiomatizovatelná, pak stačí jeden axiom: vezmeme konjunkci všech konečně mnoha axiomů.

1. (5 bodů) Předpokládejme, že Σ má libovolně velké konečné modely. Pak má Σ nekonečný model.

Důsledkem je např. následující fakt: třída všech abelovských grup, které nemají vlastní podgrupy, není axiomatizovatelná v jazyce grup. V této třídě totiž jsou libovolně velké konečné struktury (cyklické grupy $\mathbb{Z}_p$, p prvočíslo), ale žádná taková nekonečná grupa neexistuje (vezmeme prvek různý od jednotky, ten generuje cyklickou podgrupu, která je buď konečná, a tedy vlastní, anebo nekonečná, a tedy izomorfní $\mathbb{Z}$, ale ta má spoustu vlastních podgrup).

Axiomatizovatelnost lze často vyvrátit přímým použitím věty o kompaktonosti. Zde je modelový příklad:

(1) Třída těles charakteristiky p je konečně axiomatizovatelná: vezmeme axiomy těles (těch je konečně mnoho) a přídáme axiom σ_p říkající $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p} = 0$.

(2) Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizovatelná: vezmeme axiomy těles a přídáme všechny axiomy $\neg\sigma_p$, p prvočíslo. Avšak nikoliv konečně axiomatizovatelná: kdyby stačil jediný axiom α, uvažujme množinu Σ sestávající z výše uvedených axiomů a $\neg\alpha$. Tato Σ nemá model, ale přitom každá její konečná podmnožina model má, stačí vzít těleso dostatečně velké charakteristiky.

(3) Třída těles nenulové charakteristiky není axiomatizovatelná: kdyby T byla její axiomatizace, uvažujme množinu Σ sestávající z T a z formulí $\neg\sigma_p$, p prvočíslo. Tato Σ nemá model, ale přitom každá její konečná podmnožina model má, stačí vzít těleso dostatečně velké charakteristiky.

2. (15 bodů) Rozhodněte, které z následujících tříd jsou axiomatizovatelné, a které konečně axiomatizovatelné.

(a) souvislé grafy (každé dva vrcholy jsou spojené cestou),

(b) acyklické grafy (nemají žádný cyklus).

Zde grafem rozumíme strukturu (A, R) kde R je symetrická antireflexivní relace.

Návod: Jazyk teorie grafů si můžete obohatit o další symboly. Uvažovat budete axiomatizaci dané vlastnosti v původním jazyce, ale větu o kompaktnosti použijete v tom obohaceném jazyce.