Požadavky ke zkoušce z Matematické logiky

Seznam témat je na webu. Není třeba studovat víc, než co jsme dělali na přednášce a co se objevilo v domácích úkolech.

Je bezpodmínečně nutné, abyste rozuměli probraným pojmům, např. aby vám bylo jasné, co značí symboly $\vdash$, $\models$, co je to důkaz v té či oné logice, jaký je rozdíl mezi úplnou a neúplnou axiomatizací atd. atd. Také bych rád, abyste všechny tyto pojmy uměli formálně definovat. Dokázat jednoduché věci, kde si vystačíte s kombinací definic, a znát stěžejní konstrukce. Na jedničku umět dokázat i méně jednoduché věci. Byl bych rád, kdybyste pochopili, jak řešit domácí úlohy, a uměli vyřešit analogické úlohy.

Na druhou stranu, nechci vás nutit učit se nazpaměť některá neintuitivní fakta. Např. nechci, abyste se učili nazpaměť axiomy Peanovy aritmetiky nebo důkaz, že z axiomů výrokové logiky lze dokázat $a \to a$. Což ale neznamená, že byste si to neměli přečíst a zamyslet se nad tím. Níže se pokusím shrnout, co je nutné umět a co ne. Pokud si nejste jisti, naučte se toho radši víc.

Výroková logika. Semantika a syntax (axiomy výrokové logiky se neučte). Dvě verze věty o úplnosti, lemma o dedukci (důkaz $a \to a$ ne), Lindenbaumovo lemma o zúplnění (důkaz pro spočetnou množinu proměnných), konstrukce standardního modelu. Věta o kompaktnosti včetně aplikací.

Predikátová logika. Jazyk, termy, formule. Semantika: struktura, $\mathcal{A} \models \varphi$, $\Sigma \models \varphi$, definovatelnost. Syntax: důkaz, $\vdash$ (axiomy predikátové logiky se neučte, ptát se tedy nebudu ani na soundness). Dvě verze věty o úplnosti, lemma o dedukci (bez důkazu). Konstrukce modelu: struktura $\mathcal{A}_\Sigma$; úplnost, svědci a věta o tom, kdy $\mathcal{A}_\Sigma \models \Sigma$; Lindenbaumovo lemma o zúplnění, doplňování svědků, konstrukce modelu. Löwenheim-Skolemova věta (základní i nahoru) a aplikace, Vaughtův test. Věta o kompaktnosti a aplikace.

Nerozhodnutelnost a neúplnost. Formulace Gödelovy věty o neúplnosti a o nerozhodnutelnosti. Dvě definice vyčíslitelnosti: rekurzivní funkce a funkce vyčíslitelné Turingovým strojem, Church-Turingova teze. Neformální popis Turingova stroje, halting problem je nerozhodnutelný (včetně důkazu). (Stačí znát definici rekurzivní funkce, nemusíte si pamatovat lemmata z posledního domácího úkolu.) Rekurzivní funkce a relace jsou reprezentovatelné formulemi (idea důkazu). Gödelovo číslování (nemusíte si pamatovat, jak se přesně reprezentují posloupnosti), vyčíslitelnost množiny důkazů, rozhodnutelnost úplných teorií. Churchova věta o nerozhodnutelnosti a Gödelova věta o neúplnosti jako důsledek.

Struktura písemky. (120 min.):

- pár krátkých otázek na znění vět, definic a související příklady
- 1-2 početní úlohy
- jeden jednoduchý a jeden složitější důkaz z přednášky, event. konstrukce