

Jméno:

E-mail:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (5 bodů) Napište Vièetovy vztahy pro polynom třetího stupně.
2. (5 bodů) Definujte kořenové nadtěleso a uveďte nějaké pro polynom $x^5 + 2$ nad tělesem \mathbb{Q} .
3. (8 bodů) Je obor $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ tělesem? Napište větu, kterou používáte. Spočtete inverz prvku α , nebo dokažte, že neexistuje.

4. (12 bodů) Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 4 \pmod{6}$, $4x \equiv 1 \pmod{9}$.
5. (12 bodů) Spočtěte $\text{NSD}(9 + 3i, -3 + 11i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
6. (12 bodů) Napište, jak vypadají prvky rozšíření $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ a spočtěte stupeň rozšíření tohoto tělesa nad tělesem \mathbb{Q} .

7. (12 bodů) Rozhodněte, zda má v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ každý nenulový neinvertibilní prvek
- aspoň jeden rozklad na součin ireducibilních;
 - nejvýše jeden rozklad na součin ireducibilních.

Odpověď zdůvodněte, formulujte všechna tvrzení, která používáte.

8. (14 bodů) Definujte pojem gaussovského a eukleidovského oboru, včetně definice toho, co znamená, že je daný ireducibilní rozklad jednoznačný. Dokažte, že eukleidovské obory jsou gaussovské. Eukleidův algoritmus formulovat a dokazovat nemusíte.

9. (20 bodů) Vysvětlete vztah mezi konstrukcemi pravítkem a kružítkem a tělesovými rozšířeními. Tu klíčovou větu o stupni rozšíření formálně nedokazujte, pouze neformálně vysvětlete, na čem je důkaz založen. Vysvětlete, proč pravítkem a kružítkem nelze provést zdvojení krychle (tj. k dané úsečce narýsovat takovou, že krychle s její hranou má dvakrát větší objem než krychle nad původní úsečkou). Všechny věty z teorie rozšíření těles, které používáte, pečlivě zformulujte.