

Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech (tj. formálněji než na tabuli). Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (8 bodů) Definujte, co znamená, že je prvek vyjádřitelný v radikálech a že je polynom řešitelný v radikálech. Definici ilustrujte pro prvek $\sqrt[5]{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} \cdot i$.
2. (12 bodů) Kolik podgrup má grupa \mathbb{Z}_{29}^* ? Vypište je nějakým konkrétním, ale krátkým způsobem. Formulujte tvrzení, která používáte.

3. (12 bodů) Dokažte, že je grupa S_n generovaná libovolnou transpozicí a k ní vhodně zvoleným n -cyklem. Uveďte příklad, kdy transpozice a n -cyklus negenerují celou S_n . Vycházet můžete z faktu, že S_n je generovaná transpozicemi.

4. (18 bodů) Uvažujte grupu G všech afinních zobrazení nad tělesem \mathbb{Z}_5 , tj. zobrazení $x \mapsto ax + b \pmod{5}$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, s operací skládání (čili tato grupa má 20 prvků). Ověřte, že je G opravdu podgrupou grupy \mathbf{S}_5 a že zobrazení tvaru $x \mapsto x + b$ tvoří normální podgrupu N . Jak vypadá G/N ? Je G řešitelná?

5. (15 bodů) Dokažte Lagrangeovu větu včetně obou pomocných lemmat.

6. (15 bodů) Dokažte, že každé 125-prvkové těleso je izomorfní tělesu $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(f)$ pro nějaký polynom $f \in \mathbb{Z}_5[\alpha]$. Bez důkazu můžete použít jednoznačnost rozkladových nadtěles, kritérium neexistence vícenásobných kořenů a cokoliv o faktorokruzích.

7. (20 bodů)

(a) Formulujte tvrzení, které umožňuje počítat Galoisovy grupy polynomu ("vnoření, tranzitivita, faktor").

(b) Jak vypadá grupa $\text{Gal}(x^5 + 2/\mathbb{Q})$? Napište co nejvíce vlastností: kolik má prvků, s kterou známou grupou je izomorfní, zda je řešitelná, zda je abelovská, ... co vás napadne. (Čím víc a silnějších vlastností, tím více bodů. Na plný počet nemusíte mít vše, ale chci vidět netriviální úvahy.)

!!! V úloze se neodkazujte na tvrzení, které popisuje grupy $\text{Gal}(x^n - a)$. (Můžete se inspirovat jeho důkazem, který dává návod k řešení úlohy.)