

Domácí úlohy 6.
odevzdat do 29.5. 14:00

Nezapomeňte uvést přezdívku, jméno cvičícího a čas cvičení.

1. (8 bodů) Najděte všechny kořeny rovnice $x^3 + 3x^2 + 6x + 6 = 0$ v oboru komplexních čísel. Uveďte posloupnost tělesových rozšíření, která prokazuje, že je tento polynom řešitelný v radikálech.

(Nepovinný úkol: zkuste si totéž pro rovnici $x^4 + x^2 + x + 1 = 0$.)

2. (12 bodů) Jak vypadá grupa $\text{Gal}(x^5 + 2/\mathbb{Q})$? Dokažte, že má 20 prvků a není abelovská [stačí na 8 bodů]. Dokažte, že je izomorfní s grupou $Aff(\mathbb{Z}_5)$ všech afinních transformací nad tělesem \mathbb{Z}_5 . [zbylé 4 body].

Grupa $Aff(T)$ sestává ze zobrazení $x \mapsto ax + b$ nad tělesem T , kde $a \in T^*$ a $b \in T$, s operací skládání (čili tato grupa má $|T| \cdot (|T| - 1)$ prvků). Sami si ověřte (nemusíte sepisovat), že je $Aff(T)$ opravdu podgrupou grupy všech permutací na množině T , a že zobrazení tvaru $x \mapsto x + b$ tvoří normální podgrupu N , která je abelovská a faktor podle N je také abelovský.

Návod: inspirujte se důkazem tvrzení, které popisuje grupy $\text{Gal}(x^n - a)$. Výše uvedenou podgrupu N v $Aff(\mathbb{Z}_5)$ použijte k nalezení izomorfismu.