Domácí úlohy 3.
odevzdat do 27.11. 15:40

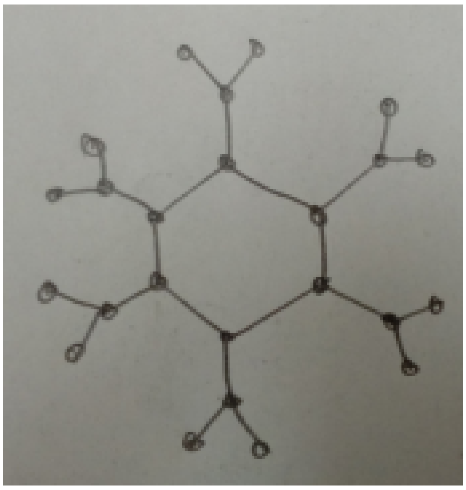
1. (4 body) Zkonstruujte nějakou neabelovskou grupu velikosti p^3 jako semidirektní součin $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes \mathbb{Z}_p$.

2. (2 body) Buď G grupa, $n \in \mathbb{N}$ a H podgrupa grupy S_n. Uvažujte semidirektní součin $G^n \rtimes_\varphi H$, kde $\varphi_\pi(a_1, \ldots, a_n) = (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)})$. Dokažte, že jde o dobře definovaný direktní součin. Tento součin se nazývá *věncový součin* a značí se $G \wr H$.

3. (6 body) (a) Dokažte, že grupa automorfismů níže uvedeného grafu je izomorfní grupě $S_2 \wr D_6$.

(b) Všimněte si, že jsme na přednášce dokázali, že $D_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$; nakreslete graf, jehož grupa automorfismů odpovídá tomuto popisu.

(Rozmyslete si, jak byste nakreslili graf, jehož grupa automorfismů je $G \wr H$ pro obecné grupy G, H, ale řešení sepisovat nemusíte.)



4. (4 body) Dokažte, že pokud grupa G *není* abelovská, pak faktorgrupa $G/Z(G)$ *není* cyklická.

5. (4 body) Buď G abelovská grupa, kde má každý prvek řád 1 nebo p, pro nějaké prvočíslo p. Dokažte, že G je izomorfní direktní mocnině $\mathbb{Z}_p^k$, pro nějaké k. (Zde k může být i nekonečné; pokud s tím máte problém, dokažte tuto větičku pro konečné grupy.)

Návod: uvažujte $H = \langle a \rangle$ a K maximální podgrupu splňující $H \cap K = 1$ (v nekonečném případě k její existenci potřebujete Zornovo lemma) a použijte větu o direktním rozkladu.