

Jméno:

E-mail:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Nechť konečná p -grupa G působí na množině X , jejíž velikost není dělitelná p . Dokažte, že existuje bod v X , který je fixovaný všemi prvky G . Formulujte věty, které používáte.
2. (20 bodů) Definujte semidirektní součin a popište všechny semidirektní součiny $S_3 \rtimes \mathbb{Z}_3$ až na izomorfismus. Napište větu o semidirektním rozkladu. Lze semidirektně rozložit grupu A_4 ?
3. (15 bodů) Dokažte, že Sylowská 2-podgrupa v $SL_2(\mathbb{Z}_5)$ je izomorfní kvaternionové grupě.
4. (15 bodů) Definujte kompoziční řadu, napište Jordan-Hölderovu větu (včetně vysvětlení definic) a napište nějakou kompoziční řadu grupy D_{2n} . Napište aspoň dvě grupy, v jejichž kompoziční řadě figuruje faktor A_5 .
5. (15 bodů) Dokažte Cauchyho větu.
6. (20 bodů) Dokažte, že konečná grupa je nilpotentní právě tehdy, když je direktním součinem p -grup. Zformulujte všechny věty, z kterých vycházíte.