Požadavky ke zkoušce z Algebraických křivek

Ke zkoušce není potřeba studovat víc, než co jsme dělali na přednášce a co se objevilo v domácích úkolech. Speciálně, není třeba se učit zbytky dlouhých důkazů, které jsme na přednášce nedodělali. Naopak, kroky důkazů, které jsem označil za "snadné cvičení", byste měli umět dát dohromady.

Je bezpodmínečně nutné, abyste ovládali základní jazyk algebraické geometrie, počínaje operátory V,I, až po definice pojmů jako je násobnost křížení. Umět základní výpočty s polynomy a jejich ideály. Chápat význam vět, o kterých jsme mluvili. Dokázat jednoduché věci, kde si vystačíte s kombinací definic ("pozorování", "cvičení"). Znát důkazy, aspoň některé, určitě ty krátké. Pokud aspirujete na lepší známku, měli byste umět napsat i těžší a delší důkazy - ptát se typicky budu na jejich části.

Základy afinní algebraické geometrie. Galoisova korespondence body vs. polynomy: základní vlastnosti, algebraické množiny vs. radikály, Hilbertova věta o nulách slabá a silná verze (bez důkazu). Množinové operace, ireducibilní rozklad algebraické množiny: existence, jednoznačnost, ireducibilita vs. prvoideály. Horní odhad počtu řešení soustavy pomocí dimenze $K[\bar{x}]/I$. Klasifikace variet v rovině.

Okruhy polynomiálních funkcí. Okruh polynomiálních funkcí, polynomiální zobrazení vs. homomorfismy souřadnicových okruhů, izomorfismus variet. Těleso racionálních funkcí, lokalizace v bodě, maximální ideál v lokalizaci: definice, lokálnost, noetherovskost. Věta o rozkladu $K[\bar{x}]/I$ pro konečné algebraické množiny (důkaz si přečtěte, ale učit se ho nemusíte, stačí chápat princip).

Lokální vlastnosti křivek v rovině. Násobnost bodu, tečny v bodě: definice, výpočet. Násobnost vs. vlastnosti lokalizace: jednoduchý $\Leftrightarrow$ lokalizace je DVO, vyjádření násobnosti jako dimenze faktorideálu. Křižicí číslo: definice, vlastnosti, výpočet (důkaz (4) pouze pro nerovnost).

Základy projektivní algebraické geometrie. Projektivní prostor, homogenní souřadnice. Homogenizace a dehomogenizace polynomů, interpretace afinních algebraických množin v projektivním prostoru. Nuly polynomů, homogenní ideály. Galoisova korespondence body vs. polynomy: základní vlastnosti, algebraické množiny vs. homogenní radikály, projektivní Hilbertova věta o nulách (bez důkazu). Ireducibilní rozklad projektivní algebraické množiny (buďte schopní zformulovat důkaz existence a jednoznačnosti v projektivním případě!). Geometrický vztah afinních a projektivních algebraických množin (bez důkazu).

Lokální vlastnosti křivek v projektivní rovině a Bézoutova věta. Funkční těleso a lokalizace pro projektivní algebraické množiny, hodnota v projektivním bodě, izomorfismus $K(V) \simeq K(V^*)$. Násobnost a křížicí číslo (včetně důkazu, že jsou dobře definované). Bézoutova věta (důkaz kromě kroku 2 o izomorismu $\Gamma_d \simeq \Gamma_{d+1}$). Aplikace: Pascalovo hexagrammum mysticum (důkaz vycházející z Bézoutovy věty), konstrukce grupové operace na eliptické křivce (důkaz vycházející z lemmatu o devíti bodech).

Početní úlohy. Základní příklady s operátory I,V. Testování ireducibility a rozklady. Počet řešení soustavy a dimenze. Póly funkce. Násobnost bodu, tečny. Křížicí čísla. *Vše v afinní i projektivní variantě!*