Domácí úlohy 4.

odevzdat do 14.5. 12:20 (na začátku prosemináře)

Úkoly můžete řešit ve dvojici, v takovém případě odevzdávejte jedno řešení se dvěma podpisy. Oba uveďte přezdívku, pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (6 bodů) Nechť R je obor integrity. Dokažte, že R je OIHI právě tehdy, když na R existuje Dedekindova–Hasseho norma.

2. (4 body) a) Ukažte, že pro komaximalní ideály I, J v oboru integrity hlavních ideálů platí $IJ = I \cap J$. b) Nalezněte komutativní okruh R a komaximální ideály I, J takové, že $IJ \neq I \cap J$.

3. (7 bodů) Ať $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$. Dokažte, že $\nu : R \to \mathbb{N}_0$ definované vztahem $\nu(r) = \|r\|^2$ je Dedekindova–Hasseho norma na R.
Nápověda: pokud pro $a \neq 0 \neq b$, kde $b \nmid a$, dokazujete existenci $p, q \in R$ takových, že $0 < \|\frac{a}{b}p - bq\| < 1$, lze BÚNO (po případné substituci $a' = a - bt$, kde $t \in R$ je vhodně zvoleno) předpokládat, že imaginární část komplexního čísla a/b leží v intervalu $(\frac{-\sqrt{19}}{4}, \frac{\sqrt{19}}{4}]$. Diskutujte případy, kdy je tato imaginární část dokonce v intervalu $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a kdy je vně.

4. (3 body) Nechť $S \leq T$ je rozšíření těles, kde T je algebraicky uzavřené. Ukažte, že potom $U = \{t \in T; t \text{ je algebraický prvek nad } S\}$ je algebraický uzávěr tělesa S.