

# Požadavky ke zkoušce z Matematické logiky

Seznam témat je na webu. Není třeba studovat víc, než co jsme dělali na přednášce a co se objevilo v domácích úkolech, s jednou výjimkou zmíněnou níže.

Je bezpodmínečně nutné, abyste znali nejen formální definice probraných pojmů, ale i jejich vyšší smysl. Dokázat jednoduché věci, kde si vystačíte s kombinací definic, a znát stěžejní konstrukce. Na jedničku byste měli umět dokázat i méně jednoduché věci. Byl bych rád, kdybyste pochopili, jak řešit domácí úlohy, a uměli vyřešit analogické úlohy. Na druhou stranu, není potřeba se učit nazpaměť některá neintuitivní fakta, jako třeba různé axiomatiky (logiky, aritmetiky). Což ale neznamená, že byste si je neměli přečíst a zamyslet se nad nimi.

Níže se pokusím shrnout, co je nutné umět a co ne. Pokud si nejste jisti, naučte se toho radši víc anebo se přijďte zeptat.

**Logika prvního řádu.** Jazyk, termy, formule. Semantika: struktura,  $\mathcal{A} \models \varphi$ ,  $\Sigma \models \varphi$ , definovatelnost. Syntax: důkaz,  $\vdash$  (*axiomy predikátové logiky se neučte, ptát se tedy nebudu ani na soundness*). Dvě verze věty o úplnosti. Konstrukce modelu: struktura  $\mathcal{A}_\Sigma$ ; úplnost, svědci a věta o tom, kdy  $\mathcal{A}_\Sigma \models \Sigma$ ; Lindenbaumovo lemma o zúplnění, doplňování svědků, konstrukce modelu (*technické důkazy, které nebyly na přednášce, se neučte*). Löwenheim-Skolemova věta (základní i nahoru) a aplikace, Vaughtův test. Věta o kompaktnosti a aplikace.

**Algoritmická vyčíslitelnost.** Turingovy stroje: definice a jednoduché úlohy. Nerozhodnutelnost halting problému. Definice vyčíslitelné funkce a relace. Rekurzivní funkce: definice a základní příklady (rozmyslete si celý důkaz tvrzení o tom, které všechny základní funkce jsou rekurzivní, viz van den Dries, sekce 5.1, str. 76-79; *definici Gödelovy  $\beta$ -funkce se nazpaměť učit nemusíte*). Reprezentovatelnost rekurzivních funkcí formulemi: definice, věta, idea důkazu. *Souvislost Turingových strojů a rekurzivních funkcí zkoušet nebudu.*

**Nerozhodnutelnost a úplné axiomatizace.** Hilbertův Entscheidungsproblem, problém úplné axiomatizace dané struktury a jejich souvislost. *Robinsonovy a Peanovy axiomaty se nazpaměť učit nemusíte.* Goodsteinovy posloupnosti - formulace, umět vysvětlit v kontextu problematiky úplnosti aritmetiky. Kódování posloupností, Gödelovo číslování formulí, rekurzivnost množiny důkazů. Churchova věta o nerozhodnutelnosti a Gödelova věta o neúplnosti jako důsledek.

**Struktura písemky.** (120 min.):

- pár krátkých otázek na znění vět, definic a související příklady
- 1-2 početní úlohy
- jeden jednoduchý a jeden složitější důkaz z přednášky, event. konstrukce