

Cvičení 1

1. Dokažte následující vlastnosti:

- (a) $I = (S)$, $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, pak $V(I) = V(S)$,
- (b) $I, J \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, $I \subseteq J$ pak $V(I) \supseteq V(J)$,
- (c) ať $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ jsou ideály v $K[x_1, \dots, x_n]$, pak $V(\cup_{\alpha \in A} I_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$,
- (d) $I, J \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, pak $V(I \cdot J) = V(f \cdot g, F \in I, g \in J) = V(I) \cup V(J)$,
- (e) $V(0) = \mathbb{A}^n(K)$,
 $V(1) = \emptyset$,
 $V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\} \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$,
- (f) Ať $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, $X \subseteq Y$, pak $I(X) \supseteq I(Y)$,
- (g) $I(\emptyset) = K[x_1, \dots, x_n]$,
 $I(\mathbb{A}^n(K)) = 0$, pokud je K nekonečné,
 $I(a_1, \dots, a_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$,
- (h) $\forall S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] : S \subseteq I(V(S))$,
 $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n(K) : X \subseteq V(I(X))$
- (i) $\forall S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] : V(I(V(S))) = V(S)$,
 $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n(K) : I(V(I(X))) = I(X)$.

2. Zjednodušte v \mathbb{C} :

- (a) $V(x^3 + 3x + 3x^2 + 1, x^2 - 8x + 15)$,
- (b) $V(x^2yz + 3x^2 + yz + 3, x^2z^2 + x^2z + x^2y + z^2 + z + y)$.

3. Ať K je nekonečné těleso, $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$.
Pak $f = 0$.
4. Dokažte, že algebraické podmnožiny $\mathbb{A}^1(K)$ jsou $\mathbb{A}^1(K)$ a konečné podmnožiny.
5. Ať K je konečné těleso, pak každá podmnožina $\mathbb{A}^n(K)$ je algebraická.