Cvičení k 5. a 6. týdnu semestru

(tahle sada příkladů pokrývá dvě cvičení)

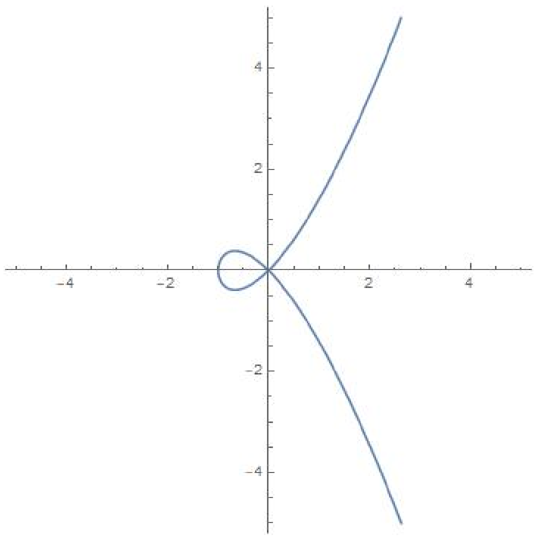
Řešení pošlete na email **j.vrablikov@gmail.com** nejpozději **24. 3. 2020**.
V případě, že budete řešit příklady ve skupinkách (což doporučuju), uveďte jména a přezdívky všech zúčastněných. Za každý odevzdaný příklad je 1 bod, hodnotí se snaha, ne správné řešení. Pokud si řešením některého příkladu nejste jisti, připište číslo příkladu do emailu a příklad vám opravím. Jinak bohužel není možné hodnotit příklady jinak, než odevzdal/neodevzdal.
Pokud si s nějakým příkladem nevíte rady dříve, než večer před deadlinem, ozvěte se a můžu vám nabídnout nějaký hint nebo konzultaci.

1. Ať $V = V(xy - wz) \subseteq A^4_K$. Určete póly funkce $q = \frac{[x]}{[w]} = \frac{[z]}{[y]} \in K(V)$. Ukažte, že $\forall P \in V$ který není pól q je hodnota $q(P)$ dobře definovaná.
2. Ať $V = V(y^2 - x^2(x-1)) \subseteq A^2_K,\ q = \frac{[y]}{[x]} \in K(V)$. Najděte póly funkce q a q^2.

   Hint k 1. a 2. Tipněte si, jak bude vypadat množina pólů a dokažte, že všechny prvky množiny jsou skutečně póly, a naopak že póly mají přesně tento tvar.
3. Ať R je obor integrity, který není tělesem. Ukažte, že R je DVO právě tehdy, když existuje $t \in R$ ireducibilní takový, že každý $z \in R,\ z \neq 0$ lze psát jednoznačně jako $z = ut^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $u \in R$ jednotku.

   Hint. Jako ireducibilní prvek t použijte generátor jediného hlavního ideálu a naopak, takový prvek t bude také hledaným generátorem.
4. Ukažte, že pro těleso T je $T[[x]]$ je DVO.
5. Ať $V = V(y) \subseteq A^2_K,\ P = (0,0) \in V$. Ukažte, že $\mathcal{O}_P(V)$ je DVO.
6. Ať $V = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_K,\ P = (0,0) \in V$. Zkuste ukázat, že $\mathcal{O}_P(V)$ není DVO.

   Hint. Použijte cvičení 2.28 z Fultona a funkci $\frac{[y]}{[x]} \notin \mathcal{O}_P(V)$.



Obrázek 1: $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$