Lokalizace souřadnicových okruhů

(zatím lib. dim., lib. těleso)

V varieta $\rightsquigarrow$ $\Gamma(V)$ obor integrity $\rightsquigarrow$ $K(V) :=$ podílové těleso pro $\Gamma(V)$

tzv. <u>těleso racionálních funkcí</u> na V

<u>Pozn.</u>: poly. fce $V \to K$, $A \mapsto f(A)$ ✓
objekty $[f]_{I(V)}$ ✓

rac. fce $V \to K$, $A \mapsto \dfrac{f(A)}{g(A)}$ ✗ NESMYSL pokud $g(A)=0$
objekty $\dfrac{[f]_{I(V)}}{[g]_{I(V)}}$ ✓

$\rightsquigarrow$ <u>Řešení</u>: lokalizace v bodě:
uvažuj jen rac. fce t.ž. $g(A) \neq 0$
ALE: co když není určeno jednoznačně ??

<u>def</u>: $q \in K(V)$ je <u>definována v</u> $A \in V$ $\equiv$ $\exists\, f, g \in K[\bar{x}]$ t.ž.

$$q = \frac{[f]}{[g]} \quad \& \quad g(A) \neq 0$$

v opačném případě ... A je <u>pól</u> pro q

! POZOR ! f, g není určeno jednoznačně ! (ani když požaduju NSD = 1 ... to by fungovalo pro $\Gamma(V)$ gaussovské, což obecně nejsou)

<u>Př.</u>: $V = V(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4$

$$\Gamma(V) = K[x,y,z,w] \,/\, (xw-yz)$$

$$q = \frac{[x]}{[y]} = \frac{[z]}{[w]}$$ ... je def. ve všech bodech $(a,b,c,d) \in V$ kde $b \neq 0$ <u>NEBO</u> $d \neq 0$

<u>def</u>: $\mathcal{O}_A(V) := \{ q \in K(V) : q \text{ je def. v } A \}$

... <u>lokalizace $\Gamma(V)$ v bodě A</u> (tj. vzhledem k multiplik. množině $\{g : g(A) \neq 0\}$)

$\ddot{\odot}$ $\Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_A(V) \subseteq K(V)$ podokruhy

(poly. fce) (rac. fce def. v A) (rac. fce)

Idea: globální vlastnosti alg. množin ~~[illegible]~~ ≡ určené okruhem $\Gamma(V)$

... např. ireducibilita, # prvků, dimenze

lokální vlastnosti alg. mn. ≡ určené okruhem $\mathcal{O}_A(V)$

... např. násobnost bodu A, tečny v A, křížicí číslo

Tvrzení: (1) Póly dané rac. fce $q \in K(V)$ tvoří alg. podmnu V

(2) K alg. uz. $\Rightarrow$ $\Gamma(V) = \underbrace{\bigcap_{A \in V} \mathcal{O}_A(V)}_{\equiv \text{ rac. fce def. všude}}$

Dk: (1) $J_q := \{ g \in K[\bar{x}] : [g] \cdot q \in \Gamma(V) \}$

tj. $q = \frac{[f]}{[g]}$ pro nějž. f nebo $[g] = [0]$

$\ddot{\odot}$ je to ideál v $K[\bar{x}]$

$\ddot{\odot}$ $I(V) \subseteq J_q$

$\ddot{\odot}$ póly $q = \{ A : g(A) = 0 \ \forall g \in K[\bar{x}] \text{ t.ž. } q = \frac{[f]}{[g]} \} = V(J_q)$

(2) $\subseteq$ ... poly. fce jsou def. všude

$\supseteq$ $q \in \mathcal{O}_A(V) \ \forall A \in V$ ≡ q je def. všude

$\Rightarrow V(J_q) = \emptyset$

$\xRightarrow{HVN} J_q = K[\bar{x}] \Rightarrow 1 \in J_q$

$\Rightarrow q = \underbrace{\frac{[f]}{[1]}}_{\text{vlastně poly. fce}}$ pro nějž. f $\in \Gamma(V)$

□

Tvrzení: $\mathcal{O}_A(V)$ je noetherovský okruh

Dk: viz $\boxed{15^*}$

Tvrzení: $\mathcal{O}_A(V)$ je noetherovský

Dk: buď I ideál v $\mathcal{O}_A(V)$, najdeme kon. bázi

... $\Gamma(V)$ je noeth., protože $K[x]/\text{něco}$ ...noeth. (HVB)

$\Rightarrow$ $I \cap \Gamma(V)$ má kon. bázi $[f_1], \dots, [f_m]$ v $\Gamma(V)$

? je to i báze I v $\mathcal{O}_A(V)$?

$q \in I \Rightarrow \exists [g] \in \Gamma(V) :: g(A) \neq 0 \;\&\; q \cdot [g] \in \Gamma(V)$

(... rep. $q = \frac{[f]}{[g]}$)

$\Rightarrow q \cdot [g] \in I \cap \Gamma(V)$

$\Rightarrow q \cdot [g] = \sum [h_i][f_i]$ pro nějak. $[h_i] \in \Gamma(V)$

$\Rightarrow q = \sum \underbrace{\frac{[h_i]}{[g]}}_{\in \mathcal{O}_A(V)} \cdot [f_i]$, pač $g(A) \neq 0$

□

def.: <u>hodnota rac. fce</u> $q \in K(V)$ v bodě A :

$$q = \frac{[f]}{[g]} \text{ t.ž. } g(A) \neq 0 \implies q(A) := \frac{f(A)}{g(A)}$$

☉ je to dobře def. ... $q = \frac{[f]}{[g]} = \frac{[h]}{[k]}$, $g(A) \neq 0 \neq k(A)$

$$\to \underbrace{[f][k]}_{[fk]} = \underbrace{[g][h]}_{[gh]} \quad v\ \Gamma(V)$$

$$\to \underbrace{(fk)(A)}_{f(A)\cdot k(A)} = \underbrace{(gh)(A)}_{g(A)\cdot h(A)}$$

$$\to \frac{f(A)}{g(A)} = \frac{h(A)}{k(A)} \quad \checkmark$$

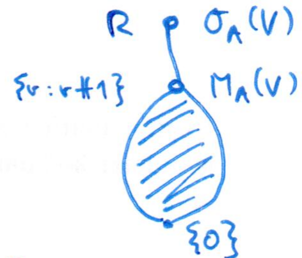
def.: $M_A(V) := \{ q \in \mathcal{O}_A(V) : q(A) = 0 \}$

☉ je to ideál, je to jádro dosazovacího hom. $\mathcal{O}_A(V) \to K$, $q \mapsto q(A)$

☉ $M_A(V) = \{ q \in \mathcal{O}_A(V) : q \nmid 1 \}$

$\implies$ je to max. ideál & obsahuje všechny vlastní ideály

(I obsahuje invertibilní prvek $\Rightarrow I = R$)



def.: okruh se nazývá <u>lokální</u> pokud je $\{ r : r \nmid 1 \}$ ideálem

☉ tento ideál je max. & obsahuje všechny vlastní ideály

Př.: $\mathcal{O}_A(V)$ je lokální okruh $\forall V, \forall A \in V$

def.: <u>diskrétní valuační obor</u> $\equiv$ noetherovský, lokální & ten max. ideál je hlavní

(DVO)

Tvrzení: R je DVO $\iff$ gaussovský & obsahuje ≤ 1 ireducibilní prvek (až na ∥)

tj.: těleso / $\exists! t$ ired. $\forall r \in R\ \exists!\ u \| 1, n \in \mathbb{N}_0$ t.ž. $r = u \cdot t^n$

Idea dk: $\Rightarrow$ $t :=$ generátor toho max. ideálu

... existence rozkladu z noetherovskosti

... jzn. z lokality

$\Leftarrow$ jediné ideály jsou $(1) \supseteq (t) \supseteq (t^2) \supseteq (t^3) \supseteq \dots$ $\square$

Př.: $T[[x]]$ je DVO

! Př.: $\mathcal{O}_A(V)$ je DVO $\iff$ A je jednoduchý bod na V

tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0$

... [důkaz bude brzy]

$V = V(f)$ ired. alg. křivka, K alg. uz., $\dots$

Navíc: pro singulární body lze z $\mathcal{O}_A(V)$ vyčíst spoustu informací

např. bude: násobnost bodu $= \dim M_A^n(f) / M_A^{n+1}(f)$ $\forall n$ dost. velké

Spec. případ: $V = \mathbb{A}^n$ ... $\Gamma(\mathbb{A}^n) \leq \mathcal{O}_A(\mathbb{A}^n) \leq K(\mathbb{A}^n)$

$\Gamma(\mathbb{A}^n) = K[\bar{x}]$, $K(\mathbb{A}^n) = K(\bar{x})$

$\mathcal{O}_A(\mathbb{A}^n) = \{ q \in K(\bar{x}) : q = \frac{f}{g}\ \&\ g(A) \neq 0 \}$

$\to$ gaussovský, čili zápis zlomku je jzn. (kde g monický, f, g nesoudělné)

Značení: $\mathcal{O}_A(\mathbb{A}^n) =: \mathcal{O}_A$