Vztah afinních a projektivních variet

... ve smyslu $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, $(a_1,\dots,a_n) \mapsto [a_1:\cdots:a_n:1]$

budeme ztotožňovat

$I \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$ ideál $\rightsquigarrow$ $I^* := (f^* : f \in I)$ ... **homogenizace** I

Cv. I^* je homog., protože je gener. formami

$V \subseteq \mathbb{A}^n$ alg. mna $\rightsquigarrow$ $V^* := V_P(I_A(V)^*)$ ... **projektivní uzávěr**

BUDE: je to nejmenší proj. alg. mna obsahující V

vezmi rovnice definující V, homogenizuj je, vyřeš je v $\mathbb{P}^n$

Př.: $V = V_A(ax+by+c)$ ... afinní přímka

$\rightsquigarrow V^* = V_P(I_A(V)^*) = V_P(ax+by+cz)$ ... projektivní přímka

Pozor! Cv. $I = (g) \Rightarrow I^* = (g^*)$

ALE: $I = (g_1,\dots,g_n) \not\Rightarrow I^* = (g_1^*,\dots,g_n^*)$

Př.: $I = (y-x^2, z-x^3)$ ... $zw - xy \in I^*$

$\notin (\underbrace{(y-x^2)^*}_{yw-x^2}, \underbrace{(z-x^3)^*}_{zw^2-x^3})$

(snadné cvičení)

Cv. $\forall V$ $\quad \underbrace{I_A(V)^*}_{} \subseteq \underbrace{I_P(V^*)}_{}$

... z definice V^*: $\quad I_P(V^*) = I_P(V_P(I_A(V)^*))$

vezmi rovnice definující V homogenizuj je

vezmi rovnice definující V^*

Cv. $V \subseteq W \Rightarrow V^* \subseteq W^*$

... $V_P(\underbrace{I_A(V)^*}_{})$

$\quad \cap \qquad \cup \quad \Cap$

$V_P(\overbrace{I_A(W)^*}^{})$

$I \subseteq K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ideál $\rightsquigarrow$ $I_* := (f_* : f \in I)$ … dehomogenizace I

$V \subseteq \mathbb{P}^n$ alg. mna $\rightsquigarrow$ $V_* := \underbrace{V_A(I_P(V)_*)}_{\text{vezmi rovnice definující } V, \text{ dehomogenizuj, vyřeš v } \mathbb{A}^n}$ … afinní část

$V \subseteq W \Rightarrow V_* \subseteq W_*$

Tvrzení (K alg. uz.): $V \subseteq \mathbb{A}^n$ alg. mna $\Rightarrow$

(1) $\underbrace{V^* \cap \mathbb{A}^n = V}_{\text{neformální zápis (type error)}}$, $(V^*)_* = V$ tj. homogenizace nepřidá afinní body

(2) V^* je nejmenší projektivní alg. mna obsahující V tj. nepřidá ani zbytečné body v nekonečnu

(3) $\emptyset \neq V \neq \mathbb{A}^n \Rightarrow$ žádná komponenta V^* neleží v nekonečnu & V^* neobsahuje všechny body v nekonečnu

(4) V ireducibilní v $\mathbb{A}^n$ $\Leftrightarrow$ V^* ireducibilní v $\mathbb{P}^n$

(5) $V = \bigcup V_i$ ired. rozklad v $\mathbb{A}^n$ $\Rightarrow$ $V^* = \bigcup V_i^*$ ired. rozklad v $\mathbb{P}^n$

Dk: (1)

$$V^* \cap \mathbb{A}^n = \{P \in V^* : a_{n+1} = 1\} =$$
$$= \{P : f(P) = 0 \ \forall f \in I_A(V)^* \ \& \ a_{n+1} = 1\}$$
$$= \{P : f^*(P) = 0 \ \forall f \in I_A(V) \ \& \ a_{n+1} = 1\} = V$$

$$(V^*)_* = V_A(\underbrace{I_P(V_P}_{\text{Rad}}\underbrace{(I_A(V)^*)}_{V^*})_*)$$

$$\overset{HVN}{=} V_A(\operatorname{Rad}(I_A(V)^*)_*) = V_A(I_A(V)) = V$$

I radikál $\Rightarrow \operatorname{Rad}(I^*)_* = I$

Pomocí (1) si dokážeme lemma, které se bude hodit v (2-5):

Lemma: $f \in I_P(V^*) \iff f_* \in I_A(V)$

Dk: ($\Rightarrow$) $f \in I_P(V^*) \Rightarrow f(A) = 0 \quad \forall A \in V^*$ (projektivní bod), čili spec. i pro ty z $V^* \cap A^n = V$

$\Rightarrow f_*(A) = 0 \quad \forall A \in V$ (afinní bod)

($\Leftarrow$) $f_* \in I_A(V) \Rightarrow (f_*)^* \in I_A(V)^* \subseteq I_P(V^*)$

$\Rightarrow f = x_{n+1}^{\text{něco}} \cdot (f_*)^* \in I_P(V^*)$ $\square$

(2) nechť $W \subseteq \mathbb{P}^n$ alg. mna obsahující $V \subseteq A^n$, $? V^* \subseteq W ?$

... stačí: $? \; I_P(V^*) \supseteq I_P(W) \; ?$

... buď $f \in I_P(W)$, pak $f_* \in I_A(V) \xrightarrow{\text{Lemma}} f \in I_P(V^*)$

protože $V \subseteq W$

(3) BÚNO V ireducibilní:

... $V \neq \emptyset$, $V^* \cap A^n = V \Rightarrow$ nemůže být celá v nekonečnu

... nechť $N :=$ body v nekonečnu $\subseteq V^*$:

$\Rightarrow I_A(V)^* \subseteq I_P(V^*) \subseteq I_P(N) = (x_{n+1})$

$\Rightarrow x_{n+1} \mid f^* \quad \forall f \in I_A(V) \Rightarrow I_A(V) = 0 \Rightarrow V = A^n$ ↯ spor

(4) $I_A(V)$ prvoideál $\iff I_P(V^*)$ prvoideál ?

($\Rightarrow$) buď f, g formy t.ž. $\underbrace{f \cdot g}_{\text{taky forma}} \in I_P(V^*)$

$\xrightarrow{\text{Lemma}} (fg)_* \in I_A(V) \xrightarrow{\text{prvoid.}} f_* \text{ nebo } g_* \in I_A(V)$

$(fg)_* = f_* g_*$

$\xrightarrow{\text{Lemma}} f \text{ nebo } g \in I_P(V^*)$

($\Leftarrow$) to samé použitím $(\,)^*$ & $I_A(V)^* \subseteq I_P(V^*)$

(5) ... ? $V_i^* \nsubseteq V_j^*$? kdyby $V_i^* \subseteq V_j^*$, pak

$$V_i \underset{(1)}{=} (V_i^*)_* \subseteq (V_j^*)_* \underset{(1)}{=} V_j$$

... V_i^* ired., protože V_i ired. ... (4)

... V^* je nejmenší alg. mna obsahující $(\bigcup V_i^*) \cap \mathbb{A}^n = \bigcup V_i$ ... díky (2)

ovšem $\bigcup V_i \subseteq \bigcup V_i^*$, čili $V^* \subseteq \bigcup V_i^*$

naopak, $V_i \subseteq V \Rightarrow V_i^* \subseteq V^* \Rightarrow \bigcup V_i^* \subseteq V^*$ } (=)

□

Tvrzení: (K alg. uz.) $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{P}^n$ proj. alg. mna, žádná komponenta neleží v nekonečnu, neobsahuje všechny body v nekonečnu

$$\Longrightarrow \quad \emptyset \neq V_* \neq \mathbb{A}^n \quad \& \quad (V_*)^* = V$$

Dk: BÚNO V ireducibilní

... ($\neq$) plynou z těch předpokladů na body v nekonečnu

... ($\subseteq$) dle Tvrz. (2) je $(V_*)^*$ nejmenší alg. mna obsah. V_*

ovšem $V_* \subseteq V$ $\Longrightarrow (V_*)^* \subseteq V$

... ($\supseteq$) ? $I_P((V_*)^*) \subseteq I_P(V)$?

buď $f^{\in}$ forma, ? $f \in I_P(V)$?

(stačí pro generátory toho ideálu, čili pro formy)

$$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} f_* \in I_A(V_*) = I_A(V_A(I_P(V)_*)) \overset{\text{HVN}}{=} \mathrm{Rad}(I_P(V)_*)$$

$$\Longrightarrow \exists N \quad (f_*)^N \in I_P(V)_*$$

$(g^k)^* = (g^*)^k$ $\forall g, k$

$$\Longrightarrow ((f_*)^*)^N \in (I_P(V)_*)^* = I_P(V) \overset{\text{radikál}}{\Longrightarrow} f = (f_*)^* \in I_P(V)$$

□