Požadavky ke zkoušce z Algebraických křivek

Vše potřebné k úspěšnému vykonání zkoušky se nachází v zápiscích. V zásadě máte znát vše, není-li níže uvedeno jinak. Kroky důkazů, které jsem označil za "snadné cvičení"nebo "pozorování"nebo nechal na cvičení, byste měli umět dát dohromady. Početní příklady u zkoušky budou zpravidla mít svůj vzor v některé sadě cvičení.

Je bezpodmínečně nutné, abyste ovládali základní jazyk algebraické geometrie, počínaje operátory V,I, až po definice pojmů jako je násobnost křížení. Umět základní výpočty s polynomy a jejich ideály. Chápat význam vět, o kterých jsme mluvili. Dokázat jednoduché věci, kde si vystačíte s kombinací definic ("pozorování", "cvičení"). Znát důkazy, aspoň některé, určitě ty krátké. Pokud aspirujete na lepší známku, měli byste umět napsat i těžší důkazy. U delších důkazů se typicky budu ptát na jejich části. Zpravidla tak, abyste si nemuseli pamatovat složité konstrukce či diagramy (otázky typu "jak z následujícího diagramu spočítáte dimenzi tohoto okruhu").

I. Základy afinní algebraické geometrie. Galoisova korespondence body vs. polynomy: základní vlastnosti, algebraické množiny vs. radikály, Hilbertova věta o nulách slabá a silná verze. Množinové operace, ireducibilní rozklad algebraické množiny: existence, jednoznačnost, ireducibilita vs. prvoideály *(důkazy máte znát z předchozích kurzů, explicitně se na ně ptát nebudu).* Horní odhad počtu řešení soustavy pomocí dimenze $K[\bar{x}]/I$. Klasifikace variet v rovině.

II. Okruhy polynomiálních zobrazení. Okruh polynomiálních funkcí, polynomiální zobrazení vs. homomorfismy souřadnicových okruhů, izomorfismus variet. Těleso racionálních funkcí, lokalizace v bodě, maximální ideál v lokalizaci: definice, lokálnost, noetherovskost. Věta o rozkladu $K[\bar{x}]/I$ pro konečné algebraické množiny *(důkaz si přečtěte, ale explicitně ho zkoušet nebudu, stačí chápat princip).*

III. Lokální vlastnosti křivek v rovině. Násobnost bodu, tečny v bodě: definice, výpočet. Násobnost vs. vlastnosti lokalizace: jednoduchý $\Leftrightarrow$ lokalizace je DVO, vyjádření násobnosti jako dimenze faktorideálu. Křižicí číslo: definice, vlastnosti, výpočet *(důkaz bodu (5) se nezkouší).*

IV. Základy projektivní algebraické geometrie. Projektivní prostor, homogenní souřadnice. Homogenizace a dehomogenizace polynomů, interpretace afinních algebraických množin v projektivním prostoru. Nuly polynomů, homogenní ideály. Galoisova korespondence body vs. polynomy: základní vlastnosti, algebraické množiny vs. homogenní radikály. Ireducibilita vs. prvoideály, ireducibilní rozklad. Projektivní Hilbertova věta o nulách. Vztah afinních a projektivních algebraických množin: homogenizace a dehomogenizace, projektivní uzávěr a afinní část *(nezkouší se důkaz tvrzení ze str. 54).* Funkční těleso a lokalizace pro projektivní algebraické množiny, hodnota v projektivním bodě, izomorfismus $K(V) \simeq K(V^*)$. Projektivní změna souřadnic.

V. Lokální vlastnosti křivek v projektivní rovině a Bézoutova věta. Násobnost a křížicí číslo (včetně zdůvodnění, proč jsou dobře definované). Bézoutova věta *(nezkouší se důkaz kroku 2 o izomorismu $\Gamma_d \simeq \Gamma_{d+1}$).* Aplikace: Pascalovo hexagrammum mysticum (důkaz vycházející z Bézoutovy věty), Cayley-Bacharachova věta a lemma o devíti bodech *(důkaz se nezkouší),* konstrukce grupové operace na eliptické křivce (důkaz vycházející z lemmatu o devíti bodech).

Početní úlohy. Základní příklady s operátory I,V. Testování ireducibility a rozklady. Počet řešení soustavy a dimenze. Póly funkce. Násobnost bodu, tečny. Křížicí čísla. *Vše v afinní i projektivní variantě!* Ilustrace znění vět na příkladech, protipříklady.