Domácí úkol č. 1

(1.1) Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle , \rangle$ platí (pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$)

$$\mathrm{Im}\,(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2) \ ,$$

kde $\mathrm{Im}\,(x)$ značí imaginární část komplexního čísla x. (Pro inspiraci viz Tvrzení 8.32.)

(1.2) Zobrazení $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno vzorcem

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle , \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 \ .$$

(Pro inspiraci viz Příklad 8.18.)

Bonusový problém: Vytvořte a dokažte podobné kriterium jako v příkladu 1.2. pro matici A řádu n.