Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 112: Lineární algebra 2, letní semestr 2019–2020

Na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů můžete použít software (třeba WolframAlpha).

Uvažujme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(10.1) Spočítejte singulární rozklady matic A, A^T, AA^T a A^TA.

Návod: Nejdřív spočítejte singulární rozklad matice $A^* = A^T$ a poté si uvědomte, že $A = UDV^*$ je singulární rozklad, právě když je $A^* = (UDV^*)^* = VD^*U^*$ singulární rozklad. Z toho snadno odvodíte rozklady i pro AA^* a A^*A, aniž byste znovu počítali vlastní čísla.

(10.2) Pro matici A spočítejte Moore-Penroseovu pseudoinverzní matici $A^\dagger$ a najděte matici $\hat{A}$ hodnosti 2 tak, aby spektrální norma $||A - \hat{A}||$ byla co nejmenší. Spočítejte spektrální normy matic $||A||$, $||A^\dagger||$ $||A - \hat{A}||$.

Bonusový problém: Frobeniova norma matice A typu $m \times n$ je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \ .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2} \ ,$$

kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ je seznam singulárních hodnot matice A, každé tolikrát kolik je jeho násobnost.