

## Domácí úkol č. 5

(5.1) Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici  $A$  řádu  $k$ . (Odpověď dokažte.)

- (a) Pokud  $A^2 = A$  a  $\lambda$  je vlastní číslo matice  $A$ , pak  $\lambda \in \{0, 1\}$ .
- (b) Pokud  $A^2 = A$ , pak 0 je vlastním číslem matice  $A$ .
- (c) Pokud  $A^2 = A$ , pak 1 je vlastním číslem matice  $A$ .
- (d) Pokud pro nějaké přirozené číslo  $n$  platí  $A^n = 0_{k \times k}$  a  $\lambda$  je vlastní číslo matice  $A$ , pak  $\lambda = 0$ .
- (e) Pokud pro nějaké přirozené číslo  $n$  platí  $A^n = 0_{k \times k}$ , pak 0 je vlastní číslo matice  $A$ .

**Návod:** Napište si vztah  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  a upravujte jej. Uvědomte si, že  $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x})$  a podobně. Jako protipříklady hledejte nějaká hodně jednoduchá zobrazení. Vzpomeňte si na věty o prostých zobrazeních. Všechny odpovědi se vejdou na jeden řádek.

(5.2) Máme k dispozici neomezenou zásobu tří druhů dlaždic – červené o rozměrech  $1 \times 1$ , modré o rozměrech  $2 \times 1$  a zelené o rozměrech  $2 \times 1$  (dlaždice stejného druhu jsou nerozlišitelné). Kolika různými způsoby lze vydláždít chodník o rozměru  $n \times 1$ ? Najděte explicitní (nikoliv pouze rekurentní) vzorec.

**Nápověda:** Najděte nejprve rekurentní vzorec pro počet způsobů vydláždění chodníku (v závislosti na  $n$ ). Rekurenci vyřešte metodami z přednášky.

**Bonusový problém:** Nechtě  $f, g$  jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru  $\mathbf{V}$ . Dokažte, že  $fg = gf$  právě tehdy, když existuje báze  $B$  prostoru  $\mathbf{V}$  taková, že každý vektor z  $B$  je zároveň vlastním vektorem operátoru  $f$  i  $g$ .