NMAG 102 Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr
MFF UK
Závěrečná zkouška — verze VZOR
XX.XX.2020
Doba řešení: 3 hodiny

Přednášející: D. Stanovský

Křestní jméno: ________________________ **Příjmení:** ____________________________

Instrukce

– **Neotvírejte dříve, než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně ve dvou složkách po čtyřech listech. První obsahuje úlohy 1-4, druhá úlohy 5-7. Jste odpovědný/á za to, že kopie zkoušky je úplná.

– První čtyři listy se odevzdávají **po 75 minutách** nebo **při prvním opuštění posluchárny**, kterýkoliv okamžik nastane dříve.

– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak. Volné stránky použijte na pomocné výpočty apod.

– Žádné elektronické pomůcky včetně telefonu a kalkulačky nejsou dovoleny.

Úloha [max]	Body
1 [8]	
2 [12]	
3 [15]	
4 [12]	
5 [15]	
6 [20]	
7 [18]	
Celkem	
Známka	

(1) [8 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky. ANO = za daných předpokladů vždy pravda, NE = jinak

(a) Uvažujte rovinnou symetrii kolem roviny dané souřadnicovými osami x, y v $\mathbb{R}^3$. Které z následujících podprostorů jsou invariantní?

ANO **NE** Přímka daná osou z.

ANO **NE** Rovina daná osami x, y.

ANO **NE** Rovina daná osami x, z.

(b) Uvažujte rovinnou symetrii kolem roviny dané souřadnicovými osami x, y v $\mathbb{R}^3$. Které z následujících podprostorů jsou invariantní?

ANO **NE** Přímka daná osou z.

ANO **NE** Rovina daná osami x, y.

ANO **NE** Rovina daná osami x, z.

(c) Uvažujte rovinnou symetrii kolem roviny dané souřadnicovými osami x, y v $\mathbb{R}^3$. Které z následujících podprostorů jsou invariantní?

ANO **NE** Přímka daná osou z.

ANO **NE** Rovina daná osami x, y.

ANO **NE** Rovina daná osami x, z.

(d) Uvažujte rovinnou symetrii kolem roviny dané souřadnicovými osami x, y v $\mathbb{R}^3$. Které z následujících podprostorů jsou invariantní?

ANO **NE** Přímka daná osou z.

ANO **NE** Rovina daná osami x, y.

ANO **NE** Rovina daná osami x, z.

(2) [12 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Charakteristický polynom matice.

(b) Soustava souřadnic v afinním prostoru.

(c) Spektrální hodnota matice.

(d) Jordanův řetízek lineárního operátoru.

(3) [15 bodů] V této úloze nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Najděte vlastní čísla reálné matice A. Pro každé vlastní číslo λ určete příslušný prostor M_λ vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Najděte vlastní čísla reálné matice A. Pro každé vlastní číslo λ určete příslušný prostor M_λ vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Najděte vlastní čísla reálné matice A. Pro každé vlastní číslo λ určete příslušný prostor M_λ vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(d) Najděte vlastní čísla reálné matice A. Pro každé vlastní číslo λ určete příslušný prostor M_λ vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(e) Najděte vlastní čísla reálné matice A. Pro každé vlastní číslo λ určete příslušný prostor M_λ vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) [12 bodů] Tvrzení vždy pouze pečlivě zformulujte, nedokazujte.

(a) Zformulujte tvrzení, které dává horní odhad výrazu $\|A\mathbf{x}\|$ pomocí $\|\mathbf{x}\|$ a některého ze singulárních čísel.

(b) Zformulujte tvrzení o změně matice bilineární formy při změně báze.

(c) Zformulujte větu o aproximaci (říká, že ortogonální projekce je v nějakém smyslu nejlepší aproximace).

(d) Zformulujte větu o tom, že symetrické bilineární formy jednoznačně odpovídají kvadratickým formám.

.

NMAG 102 Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr
Závěrečná zkouška — verze VZOR

Křestní jméno: ________________________ **Příjmení:** ____________________________

Úloha [max]	Body
5 [15]	
6 [20]	
7 [18]	

(5) [15 bodů] V této úloze je třeba předvést podrobný výpočet se stručným komentářem zdůvodňujícím správnost postupu.

(a) Symetrická bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ je určená kvadratickou formou

$$f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \ .$$

Najděte f-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a matici f vzhledem k této bázi.

(b) Symetrická bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ je určená kvadratickou formou

$$f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \;\; .$$

Najděte f-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a matici f vzhledem k této bázi.

(c) Symetrická bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ je určená kvadratickou formou

$$f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \;\; .$$

Najděte f-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a matici f vzhledem k této bázi.

(6) [20 bodů] V této úloze máte dokázat tvrzení ze skript, leckdy v reformulované nebo méně obecné podobě. V důkazu se neopírejte o obecnější formulaci téhož tvrzení ani o silnější tvrzení. Pokud kromě definic použijete ještě nějaké jiné tvrzení, měla by jeho formulace být součástí důkazu.

(a) Dokažte následující tvrzení. … (Důkaz provádějte přímo z definic.)

(b) Dokažte následující tvrzení. … (Důkaz provádějte přímo z definic.)

(c) Dokažte následující tvrzení. … (Můžete použít spektrální větu pro normální operátory.)

(d) Dokažte následující tvrzení. … (Použitá pomocná tvrzení zformulujte.)

(7) [18 bodů] Odpovědi v následujících úlohách zdůvodněte (tj. dokažte).

(a) Existuje komplexní hermitovská matice řádu 3 splňující
$$f_A((2+3i, 1+4i, 3-i)^T) = (-3+2i, -4+i, 1+3i)^T \quad ?$$

(b) Existuje komplexní hermitovská matice řádu 3 splňující
$$f_A((2+3i, 1+4i, 3-i)^T) = (-3+2i, -4+i, 1+3i)^T \quad ?$$

(c) Existuje komplexní hermitovská matice řádu 3 splňující

$$f_A((2+3i, 1+4i, 3-i)^T) = (-3+2i, -4+i, 1+3i)^T \ \ ?$$

.

.

Konec