Domácí úlohy 2.

odevzdat do 12.4. ve formě PDF na stanovsk@karlin.mff.cuni.cz

Úkoly můžete řešit ve dvojici, v takovém případě odevzdávejte jedno řešení se dvěma podpisy. Oba uveďte přezdívku, pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (4 body) Nakreslete kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{Z}_5)$.

Rada: obrázek bude hezčí, pokud si afinní rovinu reprezentujete jako síť se souřadnicemi $-2, -1, 0, 1, 2$. A nezapomeňte na body v nekonečnu (tj. rovnici si nejdřív musíte homogenizovat)!

2. (4 body) Načrtněte eliptickou křivku $y^2 = x^3 + 4x$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Tato křivka obsahuje přesně tři afinní body s racionálními souřadnicemi. Dokažte, že grupa $E_{\mathbb{Q}}(f)$ je čtyřprvková cyklická.

Rada: diskutujte řády prvků

3. (4 body) Spočtěte všechny průsečíky křivky dané rovnicí

$$(x^2 - 1)(x - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0,$$

a přímky dané rovnicí $y = 1$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Jak je možné, že nevyšla čtyři křížení? Má tato křivka nějaký bod v nekonečnu?

Poznámka: Tato křivka se nazývá "bicuspid curve"(v angličtině *cusp* znamená *hrot*). Najděte si ji na wikipedii nebo si ji nechte nakreslit Wolfram Alphou. Všimněte si, jak jim vykreslování kolem hrotů trochu selhává.

4. (4 body) Dokažte, že diskriminant Freyovy eliptické křivky je $(abc)^{2p}$ (ve značení z Ribetovy přednášky, definice diskriminantu viz přiložený komentář).

5. (4 body) Napište druhý a třetí člen modulární formy $q + aq^3 + bq^5 + \ldots$ (tj. určete a, b) odvozené z eliptické křivky $y^2 = x^3 + x$