Cvičení 7, 14.12.2020

IV korespondence
Buď K těleso.

1. Rozhodni, které z následujících množin jsou algebraické:
   a) $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in \mathbb{R}\}$,
   b) $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in \mathbb{R}\}$,
   c) $\mathbb{Z}$ (jako podmnožina $\mathbb{R}^1$),
   d) * $\mathbb{Z}^2$ (jako podmnožina $\mathbb{R}^2$),
   e) * $\{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in \mathbb{R}\}$.
2. Buď X algebraická podmnožina K^n a $u \in K$. Dokažte, že množina
   $$Y = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) : \ (a_1, \dots, a_{n-1}, u) \in X\}$$
   je algebraická v K^{n-1}. Nyní by vám mělo řešení úloh 1de) připadat snadné.
3. Pro ideál I v $K[x_1, \dots, x_n]$ dokaž $\sqrt{I} \subset I(V(I))$.
4. Pokud K není algebraicky uzavřené, pak Hilbertova věta o nulách neplatí (tedy věty 3.15b), 3.16).
5. Uvažujte přímku $X = V(x, y)$ v K^3, uvažujte K nekonečné. Popište ideál $I(X)$.

Ireducibilní rozklady algebraických množin

1. Dokaž, že přímka $V(x, y)$ je ireducibilní v K^3, pro libovolné nekonečné těleso K.
2. Dokaž, že všechny přímky v K^n jsou ireducibilní, pro libovolné nekonečné těleso K. *Návod:* posunutí, rotace.
3. Dokaž, že parabola $V(y - x^2) \subset \mathbb{C}^2$ je ireducibilní.
4. Urči množinu $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$ a rozlož ji na ireducibilní komponenty.
5. Rozlož $V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subset \mathbb{C}^3$ na ireducibilní komponenty.
6. Dokaž, že $f = y^2 + x^2(x - 1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ je ireducibilní polynom, ale množina $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ je reducibilní.