

Požadavky ke zkoušce z Komutativních okruhů, 2020/21

David Stanovský

Předmět zkoušky:

Vše potřebné k úspěšnému vykonání zkoušky se nachází v učebním textu. Měli byste si to kompletně přečíst a pochopit, měli byste také znát postupy řešení úloh ze cvičení.

Nebudu se ptát na sekci 4.1 (diofantické rovnice). Nebudu se ptát na žádnou teorii nad rámec skript (třeba doplňující informace k Zornovu lemmatu). Mohu se zeptat na libovolný důkaz, který je v textu označen jako cvičení.

Průběh zkoušky:

- zkouška bude písemná (dopoledne) a ústní (odpoledne)
- každý si může volně vybrat, zda se zapíše na prezenční nebo distanční termín
- test se píše na papír, společný pro obě varianty, 4 úlohy (z každé kapitoly jedna)
- prezenční: 90 minut; distanční: 2x 50 minut (včetně odeslání řešení), na každou etapu dostanete pouze 2 úlohy
- testové otázky se budou pít po znění definic a vět (málo), příkladech ilustrujících definice a věty, otázky kvízového typu, početní úlohy ve stylu cvičení a domácích úkolů, jednoduché důkazy (ze skript či jejich parafráze)
- ústní zkouška bude spočívat ve vysvětlení jednoho delšího důkazu nebo jedné kratší sekce, cca 20 minut na přípravu a 15 minut rozhovor
- hodnocení: test 74 bodů, ústní 20 bodů, kvízy max. 6 bodů, hranice známek 55-67.5-80
- přesné pokyny pro on-line zkoušení viz str. 3

Nevím, jak to půjde organizačně. Pokud se prvních pár termínů neosvědčí, počítejte s tím, že může dojít ke změnám.

Máte-li jakékoliv otázky nebo nápady, jak něco dělat lépe, neváhejte se (včas) ozvat.

Vzorový test

1. (17 bodů)

- Napište dvě různé definice noetherovského okruhu a dokažte, že jsou ekvivalentní.
- Které z následujících okruhů jsou noetherovské? $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{103}]$. Pokud používáte nějakou větu, formulujte ji.
- Dokažte: je-li R noetherovský a I jeho ideál, pak je R/I noetherovský.

2. (20 bodů)

- Definujte stupeň separability a dokažte, že je shora omezen stupněm ve smyslu druhácké algebry. Pokud používáte nějaké tvrzení, formulujte jej.
- Jsou tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ \mathbb{Q} -izomorfní? Pokud ano, napište izomorfismus. Pokud ne, zdůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, dokažte jej.
- Popište Galoisovu grupu $Gal(U/\mathbb{Q})$, kde U je rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 8x^2 + 15$. Kolik má prvků, s jakou známou grupou je izomorfní? Kolik má těleso U podtěles?

3. (20 bodů)

- Napište co nejvíce ekvivalentních podmínek definujících celistvý prvek.
- Určete všechny prvky oboru $\mathbb{Q}[x]$ celistvé nad \mathbb{Z} .
- Je prvek $3/2 + 2\sqrt{5}$ celistvý nad \mathbb{Z} ? Odpověď zdůvodněte metodami 3. kapitoly.
- Uvažujte okruhová rozšíření $R \subset S \subset T$. Je-li S konečně generovaný nad R jako okruh a je-li T konečně generovaný nad S jako modul, je T nad R konečně generovaný jako okruh? jako modul? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, napište protipříklad.
- Změnila by se odpověď, pokud by R, S, T byla tělesa? Z jaké věty to plyne?

4. (17 bodů)

- Definujte normu ideálu v oboru O_K , $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Spočítejte podle definice normu ideálu $(5, 2i)$ v $\mathbb{Z}[i]$.
- Dokažte, že $N(IJ) = NI \cdot NJ$.
- Jak se bezprostředně použije norma v důkazu věty o jednoznačných rozkladech ideálů na prvoideály? Tuto část věty formulujte a důkaz napište.

Pokyny pro distanční zkoušku

Co potřebujete:

- tužka, papír
- nějaké zařízení s kamerou a mikrofonem, aplikace zoom
- nějaké zařízení, které umí skenovat, například mobil s aplikací AdobeScan
- průkazka studenta

Přihlašovací údaje pošlu emailem.

Průběh testu:

- v daný čas se přihlásíte pod svým jménem, budu pouštět přes waiting room
- ukážete mi na kameru studentskou průkazku
- ukážete mi na kameru, že jste v místnosti sami a nikde neleží studijní materiály
- po dobu testu musíte mít zapnutou kameru a mikrofon (aby bylo slyšet, že se s nikým nedomlouváte)
- po dobu testu se nesmíte vzdálit z místa, odskočit si můžete mezi odevzdáním části testu a novým zadáním
- test má dvě části po 50 minutách (včetně odeslání řešení)
- zadání testu nasdílím přes zoom
- na email stanovsk@karlin.mff.cuni.cz mi pošlete naskenované řešení testu v daném časovém limitu
- po dobu testu nesmíte manipulovat s žádným elektronickým zařízením z jiného důvodu, než sken řešení – po jakékoliv manipulaci s mobilem/tiskárnou očekávám v krátkém okamžiku email s řešením
- po skončení poslední části testu zůstáváte přihlášení, v breakout místnostech rychle projdeme (já nebo jiný zkoušející) kritické části testu s jednotlivými studenty
- v případě výpadku techniky či spojení na delší než krátkou chvíli:
 - v jiné než poslední části: zkouška se anulují, termín vám nepropadá
 - v poslední nebo ústní části:
 - * pokud předchozí části nasvědčují, že zkoušku nemáte šanci složit, jste hodnoceni nedostatečně
 - * pokud předchozí části nasvědčují, že výsledek bude nevalný (3–4), zkouška se anulují a termín vám nepropadá
 - * pokud předchozí části nasvědčují, že výsledek bude pěkný (1–2), dohodneme se na náhradním dozkoušení
 - buďte připraveni na emailové instrukce ke znovunavázání spojení (pokud bude chyba na mé straně)

Ústní část:

- čas si domluvíme na konci písemného testu
- v daný čas se přihlásíte a ukážete mi na kameru, že jste v místnosti sami a nikde neleží studijní materiály
- po dobu přípravy i zkoušení musíte mít zapnutou kameru a mikrofon a nesmíte se vzdálit z místa
- vysvětlím zadání, budete mít cca 20 minut na přípravu, poté mi pošlete naskenovanou přípravu a budeme si o ní povídat
- typicky budete přihlášení dva nebo tři, pokud vás bude zvuk rušit, tak si jej vypněte (ale ne mikrofon)

Podmínky jsou adaptací obecných instrukcí UK, viz <https://karlovkaonline.cz/>